מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

אוסף משימות במתמטיקה

לתלמידי כיתה ט'

המשימות פותחו על ידי מכון ויצמן במסגרת פרויקט מל"מ

צוות הפיתוח:
פרופ' אברהם הרכבי
ג'ייסון קופר

תוכן העניינים:

בכל אחד מהפרקים משימות המתאימות לתלמידי כיתה ט'.

רוב המשימות מלווה בפתרונות והערות ולחלק גם דגשים דידקטיים.

ניתן להשתמש במשימות לשיעורים ולהערכה.

אלגברה – חזקות ושורשים

שאלה 1

בתרגילים הבאים ***m*** הוא מספר שלם (חיובי, שלילי או אפס). מצאו את הערכים של ***m*** בעזרת חוקי חזקות.

א. $3^{2m} = 6561$

ב. $2^m \times 3^m - 6 = 210$

ג. $3^{(m^2+2m)} = 1$

ד. $5^{(m^2+4m-21)} = 1$

ה. $2^{(m^2-3m-12)} = \frac{1}{4}$

ו. $(-1)^{2m} = 1$

ז. $2^{m^2} \times 4^m = \frac{1}{2}$

שאלה 2

בלי להשתמש במחשבון, קבעו איזה מספר גדול יותר בכל אחד מזוגות המספרים הבאים:

א. $\sqrt{18}$; $\sqrt{10}+\sqrt{8}$

ב. $\sqrt{10}+\sqrt{8}$; $\sqrt{11}+\sqrt{7}$

ג. $\sqrt{2}+\sqrt{18}$; $\sqrt{3}+\sqrt{12}$

ד. $\sqrt{13}-\sqrt{5}$; $\sqrt{12}-\sqrt{6}$

ה. $5+\sqrt{2}$; $4+\sqrt{11}$

ו. כתבו זוגות דומים של ביטויים שניתן להשוות את ערכם ללא מחשבון. הסבירו כיצד.

פתרונות והערות

ניתן לגשת לשאלה זו בכמה דרכים. ראשית, ניתן לנסות לאמוד תוצאות על ידי חישוב מנטלי מקורב. לדוגמא, בסעיף א ניתן להגיד כי $\sqrt{8}+\sqrt{10}$ הוא "שלוש וקצת ($\sqrt{10}$)" ועוד "שתיים וקצת ($\sqrt{8}$)" ולכן תוצאת הסכום היא מעל חמש, ואילו $\sqrt{18}$ הוא קטן מ-5. סוג של אומדן כזה ניתן להפעיל גם על סעיפים ג ו-ה, אך לא יעזור בהשוואה שבסעיפים ב ו-ד. רצוי לערוך דיון על כך עם התלמידים.

דרך אחרת לגשת לשאלה זו היא להתבסס על העיקרון הקובע כי יחס הסדר בין שני מספרים חיוביים כלשהם נשמר כאשר מעלים אותם בריבוע, ולכן ניתן להשוות את ריבועיהם כדי להסיק על הסדר ביניהם. יישום של חוקים אלגבריים (ריבוע של סכום וריבוע של הפרש) הופך את ההשוואה לקלה למדי.

א. $(\sqrt{10}+\sqrt{8})^2=18+2\sqrt{80}>18$

ב. $(\sqrt{11}+\sqrt{7})^2=18+2\sqrt{77}<(\sqrt{10}+\sqrt{8})^2=18+2\sqrt{80}$

ג. $(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2=15+2\sqrt{36}<(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2=20+2\sqrt{36}$

ד. $(\sqrt{12}-\sqrt{6})^2 = 18-2\sqrt{72} < (\sqrt{13}-\sqrt{5})^2 = 18-2\sqrt{65}$

ה. $(4+\sqrt{11})^2 = 27+2\sqrt{176} > (5+\sqrt{2})^2 = 27+2\sqrt{50}$

ו. בסעיף זה תלמידים מוזמנים "לפצח" את העיקרון עליו נבנו הסעיפים של השאלה. לשם כך, בכל סעיף ניעזר ב- a ו- b

א. $a+b < a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$. ולכן דוגמאות נוספות אפשריות הן: $\sqrt{5}+\sqrt{7} > \sqrt{12}$, $\sqrt{9}+\sqrt{16} > \sqrt{25}$

ב. אם הסכום $a+b$ קבוע (במקרה שלפנינו 18=8+10=7+11), אז ריבוע סכום השורשים הוא $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ ולכן האיבר שקובע בהשוואה הוא המכפלה ab, שהיא גדלה ככל שההפרש בין a ו- b קטן. עובדה זו שקולה לעובדה שנדונה בשאלות אחרות המתייחסת לשטח מלבן אשר היקפו נתון. השטח גדול יותר ככל שהמלבן "קרוב" לריבוע. דוגמאות נוספות: $\sqrt{7}+\sqrt{4} < \sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\sqrt{16}+\sqrt{2} < \sqrt{9}+\sqrt{9}$.

ג. אם המכפלה ab קבועה, (במקרה שלפנינו 36=18×2=12×3), אז ריבוע סכום השורשים הוא $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ ולכן השוואה נקבעת על ידי הערך של $a+b$ בכל מקרה, שהוא קטן ככל שהיחס בין a ו- b קרוב ל- 1. עובדה זו שקולה לעובדה שנדונה בשאלות אחרות המתייחסת להיקף מלבן אשר שטחו נתון. ההיקף קטן יותר ככל שהמלבן "קרוב" לריבוע.
דוגמאות נוספות:
$\sqrt{8}+\sqrt{3} < \sqrt{12}+\sqrt{2}$, $\sqrt{4}+\sqrt{4} < \sqrt{2}+\sqrt{8}$.

ד. אם הסכום $a+b$ קבוע (במקרה שלפנינו 18=5+13=6+12), אז ריבוע הפרש השורשים הוא $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$ תלוי במכפלה ab, שהיא גדולה ככל שההפרש בין a ו- b קטן.
דוגמה נוספות: $\sqrt{4}-\sqrt{7} < \sqrt{5}-\sqrt{6}$, $\sqrt{4}-\sqrt{21} < \sqrt{9}-\sqrt{16}$.

ה. סעיף זה הוא מקרה פרטי של סעיף א, כאשר a הוא ריבוע של מספר שלם (במקרה שלפנינו $16 = 4^2$, $25 = 5^2$). דוגמה נוספת: $\sqrt{2}+3 < \sqrt{7}+2$.

<u>שאלה 3</u>

בשני הסעיפים הבאים מופיעים האורכים של ניצב ושל יתר במשולש ישר זווית:

א. $\sqrt{10}$; $\sqrt{8}+\sqrt{2}$

ב. $\sqrt{2}+\sqrt{20}$; $\sqrt{5}+\sqrt{8}$

- מבלי להשתמש במחשבון, קבעו בשני המקרים איזה הוא אורכו של היתר. נמקו.
- מצאו את אורכו של הניצב החסר בשני המקרים.

ג. כתבו בעיות דומות (בשינוי המספרים) לשני הסעיפים הקודמים. הסבירו כיצד בניתם את הבעיות.

שאלה 4 (העשרה)

מספר אמסטרונג מסדר 3 הוא מספר טבעי תלת ספרתי אשר שווה לסכום של החזקות השלישיות של ספרותיו.

למשל: 407 הוא מספר אמסטרונג מסדר 3 כי $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

א. כתבו בעזרת ביטוי אלגברי את התנאי לכך שמספר בעל שלוש ספרות הוא מספר אמסטרונג.

ב. הראו כי 153 הוא מספר אמסטרונג.

ג. הראו כי לא יתכן מספר אמסטרונג מסדר 3 אשר שתיים מספרותיו הן 8 ו-9.

ד. היעזרו בעובדה כי 370 הוא מספר אמסטרונג כדי למצוא מספר אמסטרונג חדש.

ה. מספר אמסטרונג מסדר 2 הוא מספר טבעי דו-ספרתי אשר שווה לסכום הריבועים של ספרותיו. הראו כי לא קיימים מספרים כאלה.

תשובות

ד. 371

שאלה 5 (העשרה)

המתמטיקאי האנגלי גודפרי הרולד הארדי (1877-1947) סיפר את האנקדוטה הבאה על ידידו המתמטיקאי ההודי סריניוואסה רמנוג'אן (1887-1920): "אני זוכר שנסעתי לבקרו במיטת חוליו. נסעתי במונית שמספרה 1729 והערתי שזה מספר משעמם למדי, ושאני מקווה שזה איננו סימן רע. 'לא', הוא ענה, 'זה מספר מעניין מאוד; זה המספר הקטן ביותר שניתן לבטאו כסכום של שתי חזקות שלישיות בשתי דרכים שונות".

א. אחת הדרכים לכתוב את 1729 כסכום של שתי חזקות שלישיות היא: $1^3 + 12^3$.
מצאו את הדרך השנייה.

ב. אם מרשים שאחד מבסיסי החזקה יהיה מספר שלילי, אזי 91 הוא המספר הקטן ביותר שניתן לרשום כסכום של שתי חזקות שלישיות בשתי דרכים שונות. אחת הדרכים היא $(-5)^3 + 6^3$. מצאו את הדרך השנייה.

ג. דני מצא כי המספר הקטן ביותר שניתן לכתוב כסכום שני ריבועים שונים הוא 50. מצאו את שתי הדרכים.

ד. המספר 1729 הוא תוצאה של מכפלה של שני מספרים דו-ספרתיים האחד כתוב בסדר הפוך מהשני. מצאו את שני המספרים.

תשובות

א. $10^3 + 9^3$

ב. $4^3 + 3^3$

ג. $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$

ד. 19×91

<u>שאלה 6</u>

להלן נוסחה לחישוב שטח של משולש שווה צלעות שאורך צלעו a: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

א. בעזרת נוסת שטח משולש, הוכיחו כי הנוסחה הזאת נכונה לכל משולש שווה צלעות.

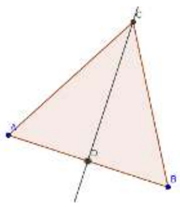
ב. מצאו שתי דוגמאות לאורך צלע עבורו השטח הוא מספר שלם.

ג. הראו כי אם a הוא מספר שלם, השטח לא יכול להיות מספר שלם.

ד. האם יתכן משולש שווה צלעות בו המספר שמציין את אורך הצלע בס"מ הוא אותו המספר שמציין את השטח בסמ"ר? אם כן מצאו מספר כזה, ואם לא הסבירו מדוע לא קיים.

<u>פתרונות והערות</u>

א. שטח המשולש שווה לחצי אורך בסיס (BD) מוכפל באורך הגובה (CD). גובה במשולש שווה שוקיים (ולכן גם בשווה צלעות) הוא גם תיכון, ולכן $BD = \frac{a}{2}$. על פי משפט פיתגורס למשולש BCD,



ב.

ג.

$CD = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. מכן ששטח המשולש הוא $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

ד. ניתן לבחור את שטח המשולש, להציב משוואה ולחשב את אורך הצלע. למשל, על מנת שהשטח יהיה שווה יחידת שטח אחת, נפתור את המשוואה $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 1$ ונקבל $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. באופן דומה נמצא שעבור שטח השווה ל- 2 יש לבחור $a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

ה. מנוסחת השטח עולה כי $\sqrt{3} = \frac{4S}{a^2}$. אם S ו- a מספרים שלמים, היינו מקבלים ששורש שלוש הוא מספר רציונאלי, וזה, כידוע, איננו נכון.

ו. למשוואה $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = a$ יש פתרון חיובי (יחיד) - $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

שאלה 7

היעזרו בנוסחאות הכפל כדי לחשב את התרגילים הבאים:

א. $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2$

ב. $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$

ג. $(\sqrt{32}+\sqrt{2})^2$

ד. $(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2$

פתרונות והערות

א. $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{12})^2+2\sqrt{12}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=12+2\sqrt{36}+3=27$. ניתן גם לפתור כך:
$(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{4}\sqrt{3}+\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2=(3\sqrt{3})^2=27$.

ב. $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{12})^2-2\sqrt{12}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=12-2\sqrt{36}+3=3$. ניתן גם לפתור כך:
$(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{4}\sqrt{3}-\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3})^2=3$.

ג. $(\sqrt{32}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{32})^2+2\sqrt{32}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=32+2\sqrt{64}+2=50$. ניתן גם לפתור כך:
$(\sqrt{32}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{16}\sqrt{2}+\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2}+\sqrt{2})^2=(5\sqrt{2})^2=50$.

ד. $(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{32})^2-2\sqrt{32}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=32-2\sqrt{64}+2=18$. ניתן גם לפתור כך:
$(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{16}\sqrt{2}-\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2}-\sqrt{2})^2=(3\sqrt{2})^2=18$.

שאלה 8

את המשוואות הבאות ניתן לפתור "בראש" – נסו את כוחכם!

א. $\sqrt{x}+1=6$

ב. $\sqrt{x+1}=6$

ג. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=6$

ד. $\sqrt{x}-1=6$

ה. $\sqrt{x-1}=6$

ו. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=6$

פתרונות והערות

א. 25

ב. 35

ג. 8

ד. 49

ה. 37

ו. 7. בעיה זו שונה מהאחרות בכך שאי אפשר לבדוק את הפתרון על ידי הצבה.

<u>שאלה 9</u>

1. סדר כל אחת מהסדרות הבאות מקטן לגדול.

- $2^0, 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^5$
- $(\frac{1}{2})^0,\ (\frac{1}{2})^1,\ (\frac{1}{2})^2,\ (\frac{1}{2})^3,\ (\frac{1}{2})^4,\ (\frac{1}{2})^5$
- $(-2)^0,\ (-2)^1,\ (-2)^2,\ (-2)^3,\ (-2)^4,\ (-2)^5$
- $(-\frac{1}{2})^0,\ (-\frac{1}{2})^1,\ (-\frac{1}{2})^2,\ (-\frac{1}{2})^3,\ (-\frac{1}{2})^4,\ (-\frac{1}{2})^5$

2. סדר את הסדרה הבאה מקטן לגדול

$$a^0, \quad a^1, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \quad a^5$$

עבור כל אחד מארבעת המקרים הבאים:

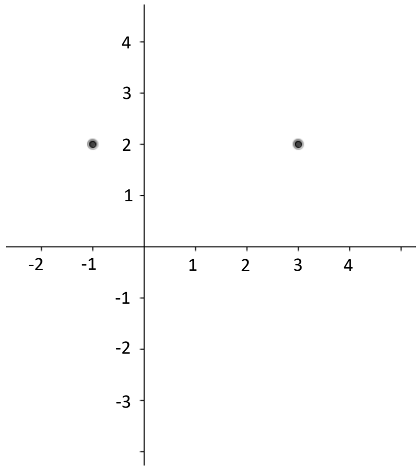
$$a > 1, \qquad 0 < a < 1, \qquad -1 < a < 0 \qquad a < -1$$

[חזרה לתוכן העניינים]

אלגברה – פונקציה ריבועית (רמה בסיסית)

שאלה 1

להלן מערכת צירים ובה מסומנות שתי הנקודות:



- רשמו את שיעורי שתי הנקודות.

- להלן ביטויים אלגבריים של פונקציות. בדקו האם הגרף שלהן עובר דרך שתי הנקודות. בכל מקרה הסבירו כיצד קבעתם.

א. $f(x) = x^2$

ב. $g(x) = x^2 - 2$

* ג. $h(x) = x^2 - 2x - 1$

* ד. $p(x) = (x - 3)^2 + 2$

* ה. $k(x) = -(x - 1)^2 + 6$

פתרונות והערות

רק הגרפים של $h(x)$ ושל $k(x)$ עוברים דרך הנקודות (3,2) ו- (-1,2).

ניתן לגשת לשאלה זו בכמה דרכים: על ידי הצבת שיעורי הנקודות או בעזרת שיקולים המבוססים על תכונות והזזות של פונקציות. למשל, ידוע כי ציר הסימטריה של הגרף של $f(x) = x^2$ הוא ציר ה- y, לכן הגרף שלה לא יכול לעבור דרך שתי הנקודות.

הגרף של $p(x) = (\mathrm{x} - 3)^2 + 2$ הוא הזזה שלוש יחידות ימינה של הגרף של $f(x) = x^2$ והזזה למעלה בשתי יחידות, לכן הוא עובר דרך (3,2) אך אינו יכול לעבור דרך הנקודה השנייה. מומלץ לדון עם התלמידים בדרכי פתרונות שונים בהתאם לרמת הכיתה.

<u>שאלה 2</u>

נתונות שלוש נקודות במערכת צירים: A(0,0), B(2,4), C(-2,4).

א. סמנו את שלוש הנקודות על מערכת הצירים, והעבירו ביניהם קטעים על מנת ליצור משולש.

ב. הסבירו מדוע המשולש שנוצר הוא שווה שוקיים.

ג. חשבו את היקף המשולש.

ד. חשבו את שטח המשולש.

ה. הראו כי דרך קדקודי המשולש עובר הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2$.

<u>פתרונות והערות</u>

ב. בעזרת משפט פיתגורס (אפילו מבלי לחשב את אורכי הצלעות) ניתן לראות כי הצלע המחברת את A ו- B והצלע שמחברת את A ו- C שוות.

ג. $2\sqrt{20} + 8$ יחידות אורך.

ד. 8 יחידות שטח. חשוב להדגיש בפני התלמידים כי אורכי הבסיס והגובה של המשולש מחושב על בעזרת שיעורי הנקודות של הקדקודים.

ה. על ידי הצבה או על ידי חישוב מנטלי רואים כי הנקודות שייכות לגרף הפונקציה (בכל אחת משלוש הנקודות שיעור ה- y הוא הריבוע של שיעור ה- x.

שאלה 3

להלן ביטויים אלגבריים של פונקציות ריבועיות. ציינו בכל מקרה באלו רביעים עובר הגרף של כל אחת מהן.

א. $f(x) = x^2 + 2$

ב. $h(x) = x^2 + 2x$

ג. $s(x) = -x^2 + 2x + 2$

ד. $d(x) = -x^2 + 2$

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל את המיומנות של שרטוט סקיצות של גרפים. כמו כן, תלמידים יכולים להיווכח כי מה ש"נראה" כגרף שאינו עובר ברביע מסוים עלול להטעות שכן יש לדמיין את המשכו של הגרף. ניתן גם לדון בסוגיה של אי-הימצאות של הגרף ברביע מסוים על ידי הצבת מספרים, למשל הגרף של $f(x)$ אינו יכול לעבור דרך הרביע הרביעי כי אין אפשרות להציב ערך שלילי בפונקציה ולקבל כתוצאה ערך שלילי.

א. רביעים ראשון ושני.

ב. רביעים ראשון, שני ושלישי.

ג. כל הרביעים.

ד. כל הרביעים.

שאלה 4

נתונות הפונקציות ריבועיות הבאות:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^2 + 2$, $m(x) = x^2 + 3$, $p(x) = -x^2 + 3$

עבור כל אחת מהפונקציות קבעו האם המשפטים הבאים נכונים ונמקו :

א. הגרף עובר דרך (0,0).

ב. הגרף עובר דרך (1,2).

ג. הגרף עובר דרך (0,2).

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל הצבת שיעור נקודות בביטוי האלגברי של הפונקציה.

א. דרך הנקודה (0,0) עובר רק הגרף של $f(x)$, כי $0^2 = 0$.

ב. דרך הנקודה (1,2) עוברים הגרפים של $g(x)$ ושל $p(x)$ כי $1^2 + 1 = 2$ וגם $-1^2 + 3 = 2$

ג. דרך הנקודה (0,2) עובר רק הגרף של $h(x)$, כי $0^2 + 2 = 2$.

שאלה 5

להלן משוואות ריבועיות אותן ניתן לפתור ללא השימוש בנוסחה $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. פתרו אותן, והסבירו את הדרך לפיה פתרתם (הקפידו למצוא את שני הפתרונות של המשוואה או לחילופין ציינו למה למשוואה אין פתרון). השתמשו בנוסחה רק במקרים בהם אינכם יודעים לפתור אחרת.

א. $x^2-48=1$

ב. $(x-2)^2=16$

ג. $(x-3)(x+1)=0$

ד. $x^2-2x=0$

ה. $(x-2)^2-1=24$ (אתגר)

ו. $(x-2)^2=x^2$

ז. $(x+2)^2=4x+4$

פתרונות והערות

מטרת השאלה היא לתרגל פתרון בעיות על ידי בחינת הביטויים, זיהוי ביטויים ותבניות מוכרות והישענות על טכניקות פשוטות.

א. מהסתכלות על המשוואה רואים כי $x^2=49$, לכן $x=\pm7$.

ב. $(x-2)=\pm4$ לכן $x=-2$ או $x=6$.

ג. $x=3$ או $x=-1$.

ד. $x=0$ או $x=2$.

ה. $(x-2)=\pm5$, לכן $x=7$ או $x=-3$.

ו. $-4x+4=0$, כלומר $x=1$. לחילופין, אפשר לטעון $x-2=\pm x$ ומכאן $2x=2$

ז. $x=0$

שאלה 6

מקיפים מגרש מלבני בגדר. אורך המגרש גדול ב- 12 מטר מרוחבו.
סמנו ב- x את אורך הצלע הארוכה במלבן.

א. שרטטו מלבן ורשמו ביטויים אלגבריים לרוחב המלבן ולהיקפו.

ב. ידוע כי שטח המלבן הוא 45 מ"ר. מה אורכי צלעותיו?

ג. רשמו תבניות לאורך ולהיקף של אותו מלבן אם נסמן ב- y את אורך הצלע הקצרה במלבן.

ד. מצאו את צלעות המלבן בעזרת התבניות של הסעיף הקודם אם ידוע כי השטח הוא 45 מ"ר.

ה. מצאו את אורך האלכסון של המלבן.

פתרונות והערות

א. רוחב המלבן הוא $x-12$ והיקפו $4x-24$.

ב. 3 מטר ו- 15 מטר.

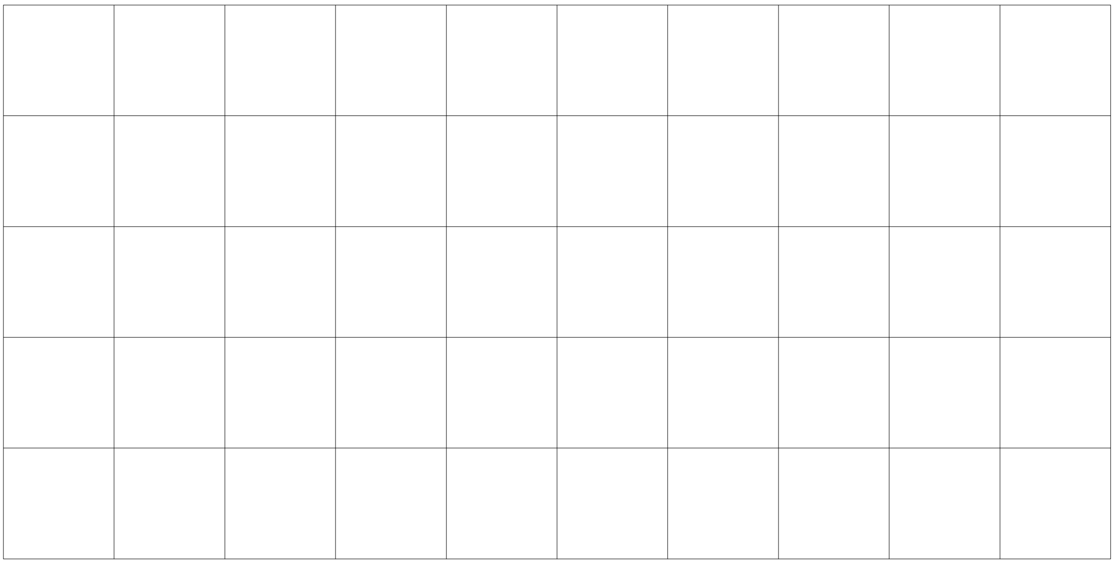
ג. מטרת התרגיל הזה היא להמחיש את האפשרות של בחירת משתנה ולהיווכח (בסעיף הבא) כי הפתרון המתקבל אינו מושפע מכך: y , $y+12$

ד. $y(y+12)=45$, ניתן לפתור בעזרת משוואה ריבועית או על ידי מציאת שני מספרים שהפרשם 12 ומכפלתם 45.

ה. $\sqrt{234}=3\sqrt{26}\cong 15.297$

<u>שאלה 7</u>

א. אפשר ליצור מלבנים שונים שהיקפם 24 ס"מ. שרטטו שניים כאלה על קווי המשבצת (אורך צלע כל משבצת הוא 1 ס"מ). רשמו את אורכי צלעות המלבנים בס"מ ואת שטחם בסמ"ר.



ב. אם אחת מצלעות המלבן היא 1 ס"מ, מה אורך הצלע השנייה ומה שטח המלבן?

ג. אם המלבן הוא ריבוע, מה אורך הצלע ומה השטח שלו?

ד. אם אורך אחת הצלעות של המלבן הוא x, רשמו ביטוי אלגברי לאורך הצלע השנייה ולשטח של המלבן.

ה. אם שטח המלבן הוא 35 סמ"ר, מה אורכי הצלעות שלו?

<u>פתרונות והערות</u>

ב. הצלע השנייה היא 11 ס"מ, ושטח המלבן הוא 11 סמ"ר.

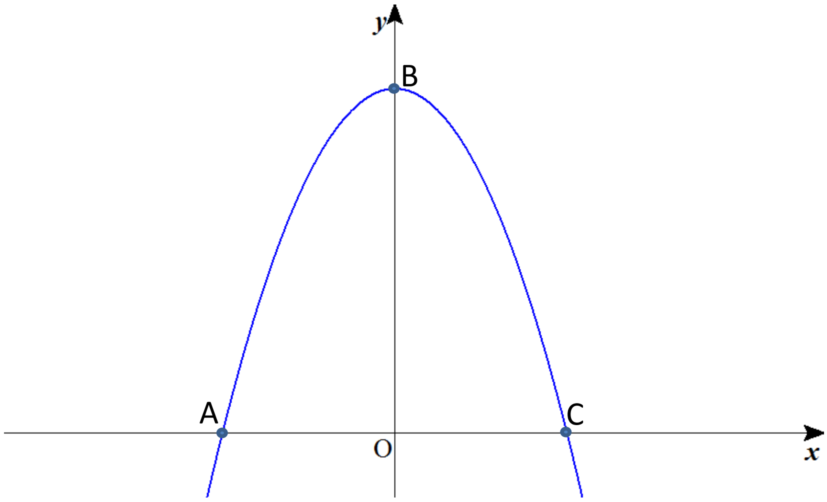
ג. אם המלבן הוא ריבוע, אורך כל צלע הוא 6 ס"מ (כי $24 \div 4 = 6$), ולכן שטחו הוא 36 סמ"ר.

ד. הצלע השנייה היא $\frac{24-2x}{2} = 12 - x$, והשטח הוא $x(12-x)$.

ה. ניתן למצוא את הצלעות על ידי פתרון המשוואה $x(12-x) = 35$, ולקבל כי הצלעות הן 7 ו- 5. ניתן גם לראות כי 35 הוא אחד פחות מ- 36. המקרה של הריבוע בו $x^2 = 36$, לכן מתקיים כי $x^2 - 1 = 35$, ולכן $(x+1)(x-1) = 35$, ומכאן שהצלעות הן 5 ו- 7.

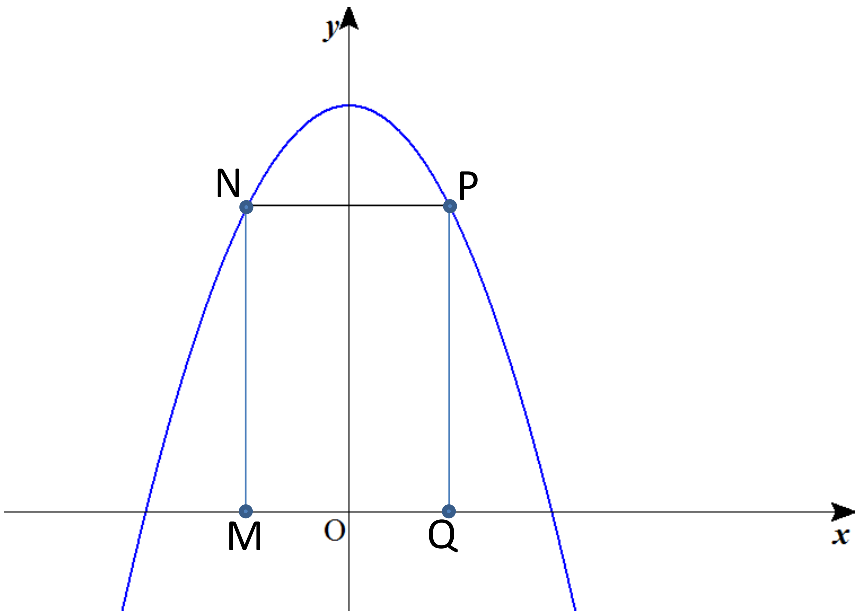
<u>שאלה 8</u>

להלן הגרף של הפונקציה $f(x) = 4 - x^2$



א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו- C (נקודות החיתוך עם הצירים).

ב. בשרטוט שלעיל נבנה המלבן MNPQ כך שהנקודות N ו- P נמצאות על הגרף של $f(x)$ (ראו שרטוט להלן), וידוע כי M(-1,0) ו- Q(1,0).



מצאו את שיעורי הנקודות P ו- N והסבירו כיצד מצאתם.

ג. מצאו את ההיקף ואת השטח של המלבן MNPQ.

<u>פתרונות והערות</u>

א. (2,0), (-2,0) ו- (0,4). רצוי לדון עם התלמידים כיצד נמצאו שיעורי הנקודות: למציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y יש להציב $x = 0$, וכדי למצוא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x יש לפתור את המשוואה $4 - x^2 = 0$.

ב. כיוון שלנקודות N ו- P יש את אותו שיעור ה- x של הנקודות M ו- Q בהתאמה, יש למצוא את שיעור ה- y של P ו- N על ידי הצבה בפונקציה של שיעורי ה- x שלהן, ולקבל כי N(-1,3) ו- P(1,3).

ג. סעיף זה נועד לתרגל מציאת אורכים של קטעים במערכת צירים כאשר ידועים שיעורי הנקודות של קצות הקטע. קטעים MQ=NP=2 וקטעים MN=PQ=3. לכן היקף המלבן הוא 10 יחידות אורך ושטחו הוא 6 יחידות שטח.

<u>שאלה 9</u>

להלן טבלאות ערכים של פונקציות קוויות וריבועיות. רשמו על כל טבלה לאיזה סוג פונקציה היא מתאימה ונמקו.

א.

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6

ב.

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9

ג.

x	$f(x)$
1	2
2	5
3	10

ד.

x	$f(x)$
1	5
2	5
3	5

ה.

x	$f(x)$
1	0.5
2	2
3	4.5

פתרונות והערות

רצוי להרגיל את התלמידים להסתכל על אפיונים שונים של הטבלאות, למשל על ההפרשים בין ערכי הפונקציה עבור הפרש קבוע בערכי המשתנה x, או לחילופין להיווכח איזו פעולה חשבונית יכולה להעתיק את ערכי המשתנה לערכי הפונקציה (על ידי ניחוש או ניסוי וטעיה), ועל ידי כך לקבוע את סוג הפונקציה. בכיתות מסוימות, יתכן ויהיו תלמידים שאף יגלו מיזמתם את הביטוי האלגברי של הפונקציה וכדאי לנצל זאת לדיון כיתתי.

א. $f(x) = 2x$

ב. $f(x) = x^2$

ג. $f(x) = x^2 + 1$

ד. $f(x) = 5$

ה. $f(x) = 0.5x^2$

ו. $f(x) = 5 + 0.5x^2$

x	$f(x)$
1	5+0.5
2	5+2
3	5+4.5

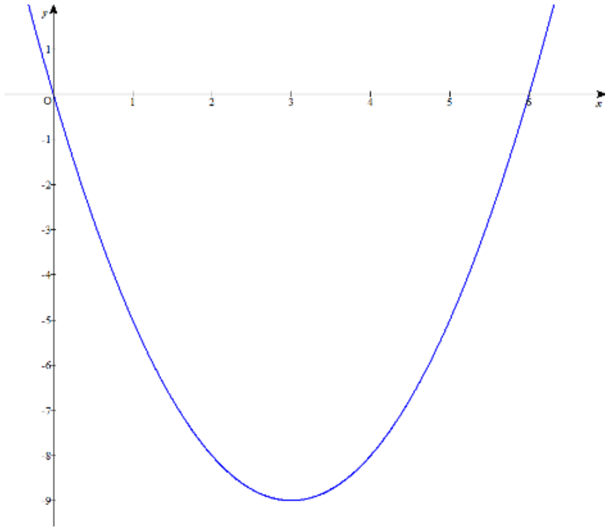
שאלה 10

להלן גרפים של שלוש פונקציות ריבועיות, ושלושה ביטויים אלגבריים:

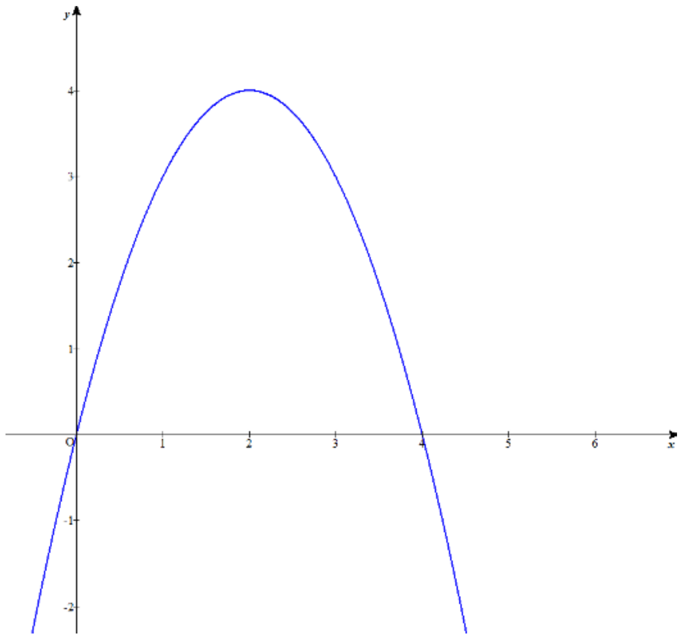
$h(x) = x^2 - 6x \qquad g(x) = x^2 + 2x \qquad f(x) = -x^2 + 4x$

התאימו לכל גרף את הביטוי האלגברי שלו ותנו מספר נימוקים להתאמה שבחרתם.

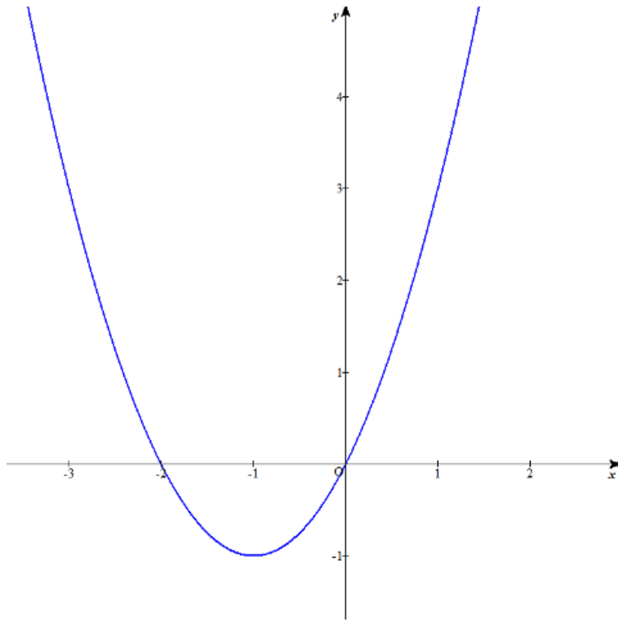
א.



ב.



ג.



ד. בנוסף לכך ששלוש הפונקציות הן ריבועיות, יש תכונה משותפת יש להן?

<u>פתרונות והערות</u>

$f(x) = -x^2 + 4x$ ↔ גרף ב

$g(x) = x^2 + 2x$ ↔ גרף ג

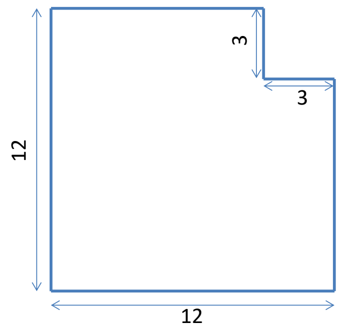
$h(x) = x^2 - 6x$ ↔ גרף א

שיקולים אפשריים להתאמה: פרבולה "מחייכת" או "בוכה", הצבת השורשים בביטוי האלגברי.

ד. תלמידים מסויימים ישימו לב ששלושת הגרפים עוברים דרך ראשית הצירים. יתכן ותלמידים אחרים ישימו לב כי בשלושת הביטויים האלגבריים אין איבר חופשי. מורים יכולים לשקול לפי רמת כיתתם האם לדון בקשר בין שתי תכונות אלה, כלומר, שהיעדר איבר חופשי מבטיח כי הצבה של המספר אפס תמיד תיתן כתוצאה אפס, ומשמעות הדבר היא כי הנקודה (0,0) חייבת להיות על הגרף.

שאלה 11

בשרטוט משושה שנבנה מ"גזירת" ריבוע קטן מאחת הפינות של ריבוע גדול.

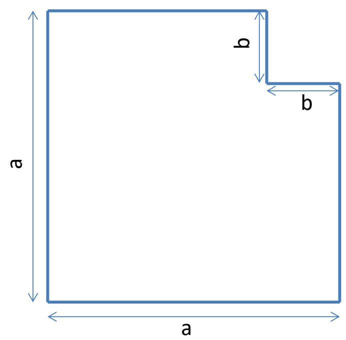


א. חשבו את אורך הצלעות במשושה אשר אורכן איננו מצוין בשרטוט. חשבו את היקפו.

ב. חשבו את שטח המשושה.

ג. חיים חישב את שטח המשושה כך: $9\times3 + 9\times3 + 9\times9$. חשב ובדוק שהחישוב אכן מתאים לתוצאה שקיבלת בסעיף הקודם. הסבירו כיצד חישב חיים.

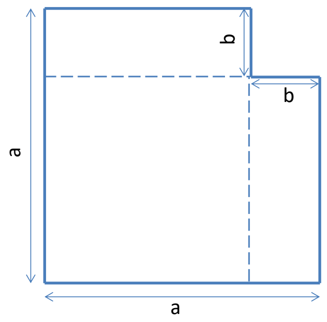
ד. להלן משושה אחר:



מצאו ביטוי אלגברי המבטא את ההיקף שלו.

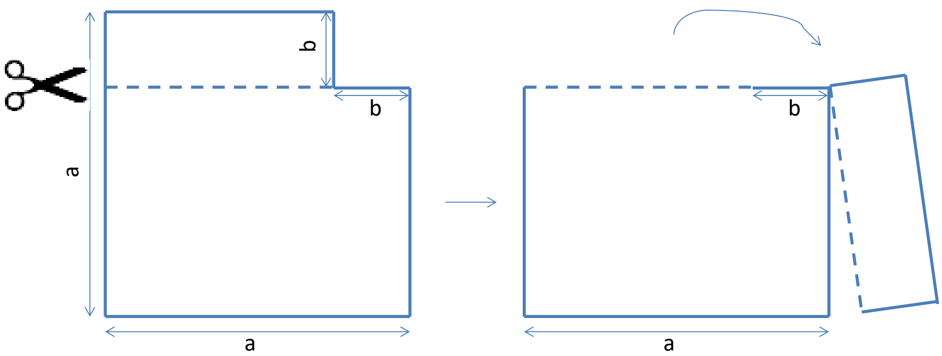
ה. דני מצא כי שטח המשושה (המשורטט בסעיף הקודם) $a^2 - b^2$. הסבירו בעזרת השרטוט מדוע הביטוי של דני נכון.

ו. (אתגר) הילה פירקה את המשושה באופן הבא:



והיא מצאה את הביטוי הבא לשטח: $(a-b)^2+2(a-b)b$. הסבירו כיצד הפירוק שלה עזרה לה למצוא את הביטוי הזה.

ז. רונית חתכה את הצורה והרכיבה ממנה מלבן, ככה:



כתבו ביטויים אלגבריים לצלעות המלבן המתקבל, וכתבו ביטוי אלגברי לשטחו.

<u>פתרונות והערות</u>

שאלה זו מיועדת לתרגל את נוסחאות הכפל בהקשר גיאומטרי, ולהיווכח כי ביטויים שנראים מאוד שונים בהתחלה הם זהים (לאחר פישוט).

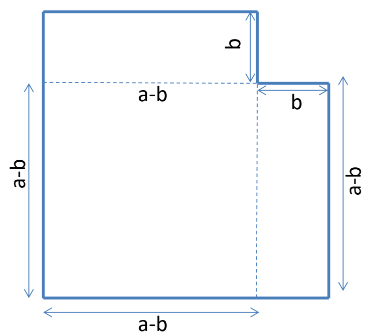
א. צלעות המשושה הן 12, 12, 9 (12-3), 9, 3, ו- 3. לכן ההיקף הוא 48. רצוי להעיר את תשומת ליבם של הילדים כי זה בדיוק ההיקף של הריבוע שצלעותיו 12, כי ניתן להרכיב/להשלים את הריבוע על ידי הזזה של שתי הצלעות שאורכן 3.

ב-ג. רצוי לבקש מהתלמידים דרכים שונות לחישוב. ואם הם מתקשים להציע דרכים שונות רצוי לבנות אותן ביחד אתם. למשל, ניתן לחשב על ידי חיסור שטחו של הריבוע הקטן (9) משטחו של הריבוע הגדול (144). ניתן, לפרק את המשושה לשלוש צורות: ריבוע שצלעותיו 9 ושני מלבנים שצלעותיו 3 ו- 9. לכן החישוב הוא 81+27+27. ניתן גם לפרק את הצורה לשני מלבנים (ראה סעיף אחרון להלן). החישובים האלה מהווים הקדמה לחישוב האלגברי הכללי בסעיפים הבאים, אשר בעזרתם חוזרים על טכניקה אלגברית. יתכן ובכיתות מסוימות רצוי לעבוד על עוד דוגמא מספרית דומה לפני שעוברים להכללה האלגברית.

ד. 4a מחשבים על ידי: a+a+(a-b)+b+b+(a-b). יתכן ותלמידים מסוימים ישימו לב מההתחלה כי ההיקף הוא זהה להיקף של הריבוע a×a.

ה. החישוב מבוסס על ידי הפרשי שטחי הריבועים.

ו. הפירוק הגיאומטרי עוזר להסביר את החישוב, כך:



ז. הביטוי שרונית תקבל הוא (a+b)(a-b) שהוא הפירוק לגורמים של הביטוי $a^2 - b^2$.

<u>שאלה 12</u>

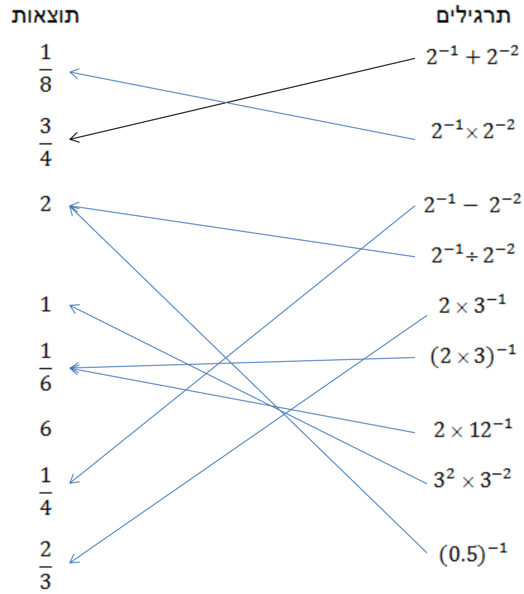
התאימו לכל תרגיל חישוב את תוצאתו (לשני תרגילים שונים יכולים להיות אותה תוצאה. כמו כן, יש תוצאות שלא מתאימות לאף תרגיל).

תוצאות	תרגילים
$\frac{1}{8}$	$2^{-1} + 2^{-2}$
$\frac{3}{4}$	$2^{-1} \times 2^{-2}$
2	$2^{-1} - 2^{-2}$
	$2^{-1} \div 2^{-2}$
1	2×3^{-1}
$\frac{1}{6}$	$(2 \times 3)^{-1}$
6	2×12^{-1}
$\frac{1}{4}$	$3^{2} \times 3^{-2}$
$\frac{2}{3}$	$(0.5)^{-1}$

<u>פתרונות והערות</u>

שאלה זו מיועדת לתרגל חישוב של חזקות עם מעריך שלילי ולעמת את התלמידים עם שגיאות אפשריות.

כמו כן, יש הזדמנות לחזור על חישובים פשוטים עם שברים.



<u>שאלה 13</u>

א. חשבו את התרגילים הבאים בעזרת מחשבון: 31^2, 53^2.

ב. בדקו את תוצאת התרגילים של הסעיף הקודם בעזרת הנוסחה $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ג. עדי חישב 32×32 בדרך הבאה: 30 כפול 30 הם 900, ו- 2 כפול 2 הם 4, לכן $32\times32=904$. בדיקה במחשבון מראה כי התוצאה של עדי איננה נכונה. מה התוצאה הנכונה וכיצד אפשר להסביר את הטעות של עדי בעזרת הנוסחה $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

ד. חשבו את התרגילים הבאים בעזרת הנוסחה $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$: 18^2, 99^2.

ה. חשבו את התרגיל הבא בעזרת מחשבון: $\frac{99^2-98^2}{99+98}$.

ו. בדקו את התוצאה של התרגיל הקודם בעזרת הנוסחה $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

פתרונות והערות

א-ב. $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 3 + 3^2 = 2809$.

ג. טעותו של עדי נובעת מלשכוח לחבר את האיבר האמצעי של הנוסחה. לפי החישוב שלו: $32^2 = 30^2 + 2^2 =$ 904, אך החישוב הנכון היה צריך להיות (לפי הנוסחה): $32^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 2 + 2^2 =$ $904 + 120 = 1024$.

ד. $18^2 = (20-2)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 2 + 2^2 = 324$

$99^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

ה-ו. $\frac{99^2 - 98^2}{99+98} = \frac{(99+98)(99-98)}{99+98} = 1$

שאלה 14

נתון ריבוע שאורך צלעו x ס"מ. מאריכים את אורך הצלע ב- 5 ס"מ.

א. שרטטו ציור מתאים וסמנו בו את השטח שהתווסף. מאלו צורות הוא מורכב?

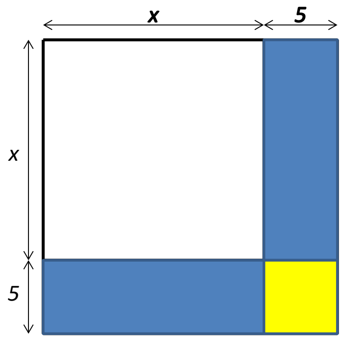
ב. כתבו ביטוי אלגברי לשטח של הריבוע החדש.

ג. כתבו ביטוי אלגברי לתוספת השטח.

ד. אם השטח גדל ב- 125 סמ"ר, מה היה השטח של הריבוע המקורי?

פתרונות והערות

א. בשרטוט מודגשים השטחים שהתווספו: שני מלבנים אשר אורכי צלעותיהן הן x ו- 5 ס"מ, וריבוע בעל צלע של 5 ס"מ.



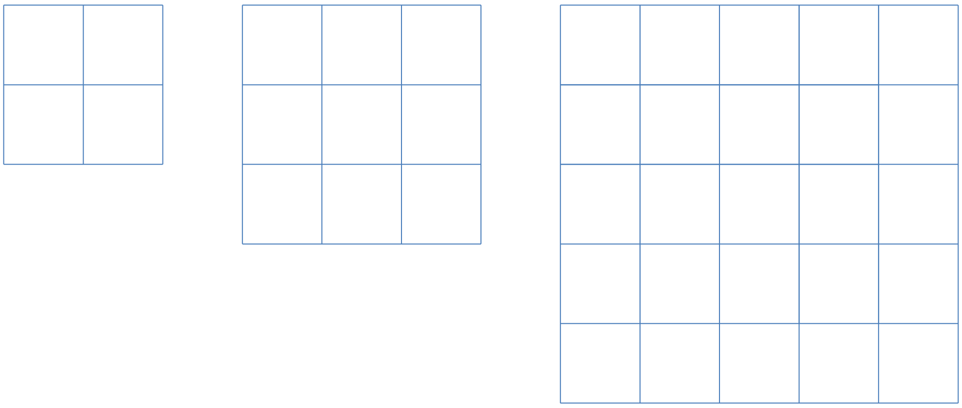
ב. $(x+5)^2$, מאלגברה יודעים כי הביטוי הזה שווה ל- $x^2+2\bullet x\bullet 5+5^2$, וממנו רואים את שלושת השטחים שהתווספו.

ג. שטח הריבוע גדל ב- $(x+5)^2-x^2=10x+25$

ד. $x=10 \quad \Rightarrow \quad 10x+25=125$, ולכן השטח המקורי היה 100 סמ"ר.

שאלה 15

א. ספרו (או חשבו) את מספר המשבצות שיש בכל אחד מהריבועים הבאים:



ב. כמה משבצות יש בריבוע בו יש n משבצות בכל שורה ובכל טור?

ג. כמה משבצות מתווספות כאשר מגדילים ריבוע של 7×7 לריבוע של 8×8?

ד. רשמו ביטוי אלגברי למספר המשבצות המתווספות כאשר מגדילים ריבוע של $n \times n$ לריבוע של $(n+1)\times(n+1)$?

ה. אם בשלב מסוים התווספו 61 משבצות, כמה משבצות היו בשלב הקודם?

פתרונות

א. 4, 9, 25

ב. n^2

ג. 64-49=15

ד. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

ה. $2n+1=61 \Rightarrow n=30$, ולכן בשלב הקודם היו 900 משבצות.

שאלה 16

המתמטיקאי אנגלי אמר שגילו הוא x בשנה x^2. ידוע כי הוא חי במאה ה-19, באיזה שנה הוא נולד?

פתרונות והערות

שאלה זו היא סוג של חידה ורצוי לתת לתלמידים להתנסות תחילה עם כל מיני מספרים כדי לוודא שהבינו את שאלה. אנו מציעים לאפשר שימוש במחשבון. בשלב שני רצוי לעזור לתלמידים לחפש ממה להתחיל. כיוון שהמתמטיקאי חי במאה ה- 19, יש לחפש מספרים ריבועיים גדולים מ- 1800 וקטנים מ- 1900. לאחר כמה ניסיונות בעזרת המחשבון, ניתן למצוא כי המספר הריבועי היחיד בין 1800 ל- 1900 הוא 1849, שהוא הריבוע של 43. לכן הוא נולד בשנת 1806. המתמטיקאי שאמר זאת על עצמו היה אוגוסטוס דה מורגן. אפשר לעודד את התלמידים למצוא מאה אחרת בו המתמטיקאי היה יכול לטעון את אותה טענה. לשם כך כדי לבנות את טבלת הריבועים עד 44 (כי $45^2 = 2025$ וזה כבר מעבר לזמננו...).

<u>שאלה 17</u>

הטבלה הבאה מופיעה על אריזה של קרקרים (ג' פירושו גרם, מ"ג פירושו מיליגרם שהוא אלפית הגרם).

קריקר עם שיבולת שועל

הרכב תזונתי	פרוסה	100 גרם
קלוריות (קק"ל)	20	310
חלבון	0.8 ג'	12.0 ג'
פחמימות	4.0 ג'	62.0 ג'
שומן	0.1 ג'	1.5 ג'
סיבים תזונתיים	1.1 ג'	17.5 ג'
כולסטרול	0 ג'	0 ג'
נתרן	20.0 מ"ג	300 מ"ג
סידן	6.5 מ"ג	100 מ"ג
מגנזיום	23.0 מ"ג	350 מ"ג

לאחר הפתיחה רצוי לשמור במיכל אטום
רכיבים: שיבולת שועל וסיבים משיבולת-שועל, קמח חיטה מלאה, קמח חיטה, סוכרים, מלח, שמן חמניות, סידן.
משקל נקי: 200 גרם
כשר פרווה בהשגחת הרבנות, ערד

א. כמה קלוריות (ביחידות קק"ל) יש בפרוסה אחת?

ב. כמה קלוריות (ביחידות קק"ל) יש ב- 100 גרם קרקרים?

ג. מה המשקל הנקי (תכולה ללא אריזה) של קופסת הקרקרים?

ד. כמה פרוסות בקופסה? כיצד מצאתם?

ה. מה משקל של כל פרוסה?

פתרונות והערות

שאלת אוריינות זו מיועדת לתרגל קריאת מידע מטבלאות. המידע יכול להיות נגיש מקריאה ישירה של נתונים (במקרה זה יש לדעת היכן לחפש את נתונים המבוקשים) או מחישוב מידע שאינו מפורש בטבלה אך ניתן "לגזור אותו" מהנתונים.

א. 20 (קריאה ישירה מהשורה הראשונה בטבלה).

ב. 310 (קריאה ישירה מהשורה הראשונה בטבלה).

ג. 200 גרם. נתון זה רשום בשורה שלפני האחרונה.

ד. בפרוסה בודדת יש 20 קק"ל ובחבילה כולה יש 620 קק"ל. מכאן שיש $620:20 = 31$ פרוסות בחבילה, ומשקל כל אחת הוא $200:31 \approx 6.5$ גרם.

שאלה 18

התאימו ביטויים מהטור הראשון לביטויים שווים בטור השני והסבירו מדוע הם שווים.

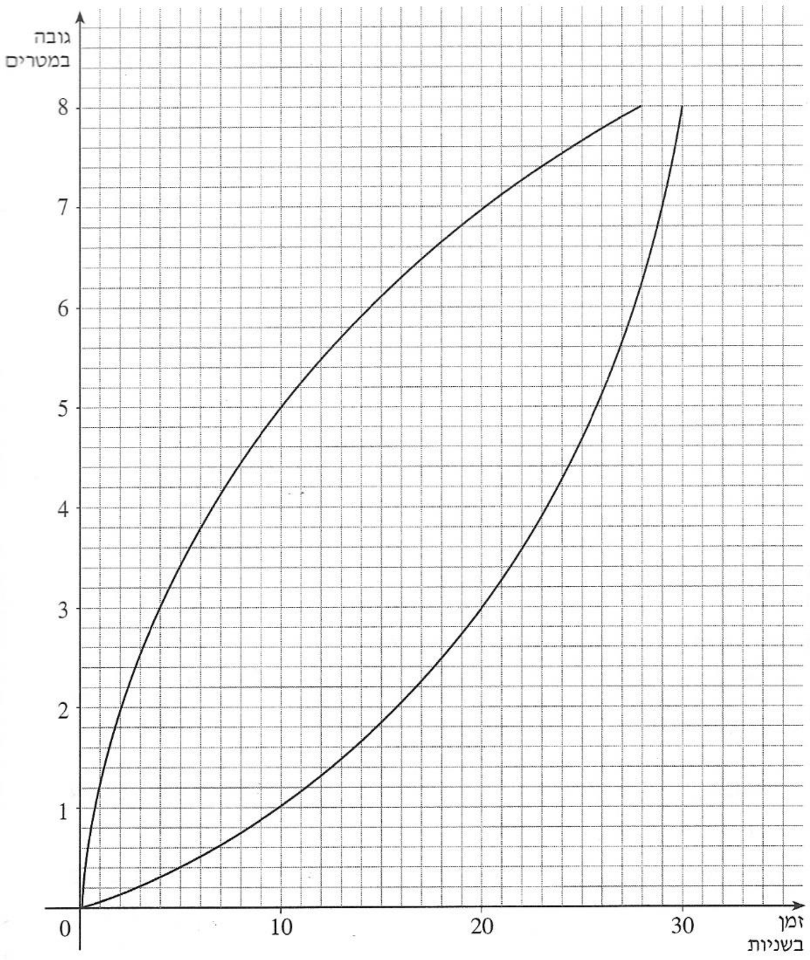
x^2+6x+9	$(x-2)(x-3)$
a^2+9+6a	$(x-3)(x+3)$
$-x^2-6x-9$	$x(x-9)$
$9-6a+a^2$	$(a-3)^2$
x^2-9x	$(a+3)^2$
x^2-9	$-(x+3)^2$
x^2+5x+6	$(x+3)^2$
x^2-5x+6	$(x+2)(x+3)$

פתרונות

x^2+6x+9	$(x-2)(x-3)$
a^2+9+6a	$(x-3)(x+3)$
$-x^2-6x-9$	$x(x-9)$
$9-6a+a^2$	$(a-3)^2$
x^2-9x	$(a+3)^2$
x^2-9	$-(x+3)^2$
x^2+5x+6	$(x+3)^2$
x^2-5x+6	$(x+2)(x+3)$

שאלה 19

הגרפים מתארים גובה של שני לוליינים במהלך הטיפוס שלהם על חבלים בקרקס.



א. לוּלי התחיל לטפס לאט ואחר כך הגביר את הקצב ואילו זריזי התחיל בטיפוס מהיר ואחר כך האט.
התאימו לכל אחד מהם את הגרף המתאר את אופן הטיפוס.

ב. לאיזה גובה הגיע לוּלי כעבור עשרים דקות?

ג. כמה זמן לקח לזריזי להגיע לגובה של 3 מטרים?

ד. כיצד ניתן לראות בגרפים שהם טיפסו לאותו גובה, ומה הוא גובה זה?

ה. כעבור כמה זמן הגיע כל אחד מהם לחצי מגובה הטיפוס?

ו. מה היה הפרש הגבהים כעבור 10 שניות?

ז. כעבור כמה דקות הפרש הגבהים ביניהם היה 3 מטרים?

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל היבטים שונים של קריאת גרפים המתארים מצב מסוים, למשל: זיהוי גרף על פי תיאורו המילולי (סעיף א), קריאה של שיעור נקודה בהינתן השיעור השני (סעיפים ב ו-ג), והשוואה/הפרש בין שיעור אחד של שתי נקודות כאשר ידוע השיעור השני (סעיפים ד, ה, ו ו-ז).

א. הגרף התחתון מתאר את קצב הטיפוס של לולי (תחילה איטי ואחר כך מהיר) והגרף העליון מתאר את קצב הטיפוס של זריזי (תחילה מהיר ואחר כך איטי).

ב. 3 מטרים. ניתן לקרוא מהגרף התחתון כי כאשר שיעור ה- x הוא 20, שיעור ה- y של הנקודה על הגרף הוא 3.

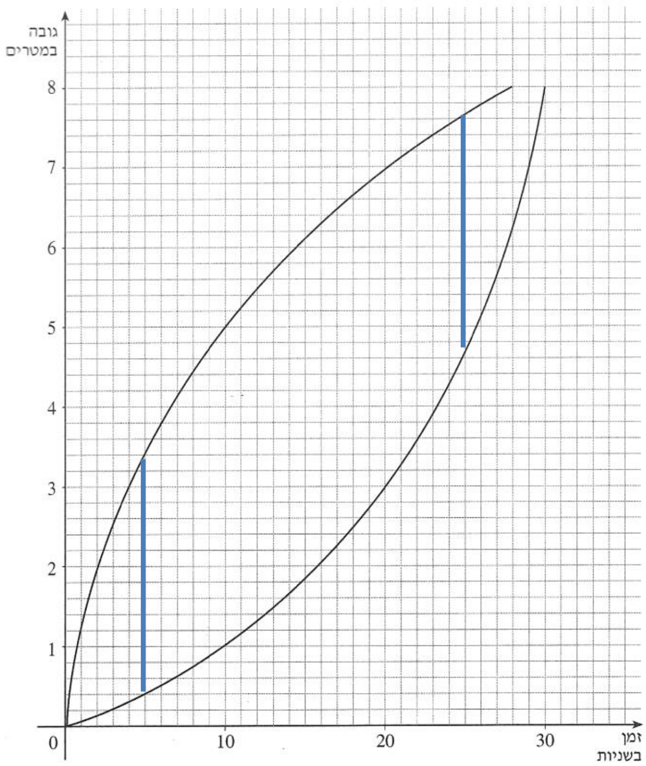
ג. 4 שניות. ניתן לקרוא מהגרף העליון כי כאשר שיעור ה- y הוא 3, שיעור ה- x של הנקודה על הגרף הוא 4.

ד. שניהם טיפסו לגובה 30 מטרים (לנקודת הסיום יש אותו שיעור y).

ה. ללולי לקח בין 6 ל-7 שניות ולזריזי בין 23 ל-24 שניות להגיע לגובה של 4 מטרים.

ו. 4 מטרים. ניתן לחשב הפרש זה על ידי ההפרשים בין שיעורי ה- y של שתי הנקודות (על שני הגרפים) בהן שיעור ה- x הוא 10.

ז. ישנן שתי אפשרויות: כעבור 5 דקות וכעבור 25 דקות (בערך) – ראו גרף:



שאלה 20

לפניכם טבלת מרחקים בק"מ בין ישובים שונים.

	אילת	באר-שבע	חברון	חדרה	חיפה	טבריה	ירושלים	יריחו	לוד	מטולה	נצרת	סדום	צפת	שכם
באר-שבע	243													
חברון	291	48												
חדרה	405	162	119											
חיפה	451	208	168	49										
טבריה	491	248	201	86	70									
ירושלים	326	83	37	112	158	198								
יריחו	364	119	73	132	146	181	35							
לוד	341	98	88	66	112	152	51	86						
מטולה	555	312	266	150	122	64	262	220	216					
נצרת	461	218	172	56	38	32	135	126	122	96				
סדום	187	78	100	240	286	326	135	171	176	390	296			
צפת	527	284	271	122	74	36	234	192	188	48	57	362		
שכם	388	145	99	54	93	103	62	78	61	167	73	197	139	
תל-אביב	356	113	100	49	95	135	63	98	18	199	105	191	171	64

א. מה מציין המלבן המודגש?

ב. מהו המרחק בין באר שבע לנצרת?

ג. מה הוא המרחק בין חדרה לנצרת?

ד. נהג משאית חייב לנסוע מטבריה לצפת ומשם לחיפה. כמה ק"מ הוא ייסע בסך הכול?

ה. אלו יישובים בטבלה הם הכי מרוחקים זה מזה?

ו. האם קיימים זוגות יישובים עבורם המרחק זהה?

ז. דני טוען כי הטבלה מציינת רק מרחק ליעד אחד מבאר שבע, ואילו מתל-אביב יש מרחקים ל-14 יעדים? האם הוא צודק? נמקו.

ח. כמה יישובים מיוצגים בטבלה?

ט. (אתגר) כמה מרחקים מתוארים בטבלה?

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל התיידדות עם סוג מסוים של טבלה (הנפוצה למשל באטלסים) קריאת נתונים ממנה והבנת המבנה שלה.

א. המלבן המודגש נמצא בשורה של צפת ובעמודה של ירושלים ולכן הוא מציין את המרחק בין שני יישובים אלה, 234 ק"מ.

ב. 218 ק"מ. תלמידים יבחינו כי ניתן למצוא נתון זה בשתי דרכים שונות: להתחיל מהעמודה של באר שבע ולמצוא את השורה של נצרת, או להתחיל מהשורה של נצרת ולמצוא את העמודה של באר שבע. בתא המשותף לעמודה ולשורה מצוין המרחק המבוקש. תלמידים מסוימים יבחינו כי לא ניתן להתחיל מהשורה של באר שבע (שהרי בשורה זו מצוין רק מרחק לאילת) או מהעמודה של נצרת (כי אינה "חותכת" את השורה של באר שבע).

ג. 56 ק"מ.

ד. 36 ק"מ ועוד 74 ק"מ, ובסך הכול 110 ק"מ.

ה. סעיף זה מחייב הסתכלות "הפוכה" בטבלה: במקום לחפש מרחק בין יישובים מחפשים יישובים לפי המרחק שביניהם. במקרה זה, יש למצוא בטבלה את הערך הגבוה ביותר (המרחק הגדול ביותר, במקרה זה 555 ק"מ) ולקרוא את שמות היישובים של השורה ושל העמודה בהן נמצא מרחק זה (מטולה ואילת).

ו. כמו במקרה הקודם, סעיף זה מחייב קריאה "הפוכה" של הטבלה כדי למצוא תחילה מרחקים זהים ואחר כך לזהות את היישובים המתאימים להם. המרחק ממטולה לטבריה והמרחק מתל-אביב לשכם זהה: 64 ק"מ. כמו כן, המרחק מנצרת לשכם והמרחק מיריחו לחברון זהה: 73 ק"מ.

ז. הערה זו של דני מיועדת להעיר את תשומת ליבם של התלמידים למבנה המיוחד של הטבלה ה"משולשת", שאולי כבר חשו בו במהלך העיסוק בסעיפים הקודמים. כיוון שהמרחק מיישוב A ליישוב B זהה למרחק מיישוב B ליישוב A, אין צורך להרכיב טבלה ריבועית מלאה (של 15x15), כלומר טבלה בה כל הערים נמצאות בכל שורה ובכל עמודה. כמו כן, אין טעם לציין את "האלכסון" של הריבוע בו היה אמור להופיע המרחק של כל יישוב לעצמו.

ח. 15 יישובים – יתכן ותלמידים מסוימים יגידו רק 14 כי בגלל המבנה המיוחד של הטבלה יש נטייה "לשכוח" לספור יישוב אחד.

ט. יש כמה דרכים לספור: ספירה ידנית מלאה, אך זה מייגע וכדאי לאתגר את התלמידים למצוא שיטה יעילה יותר תוך הקפדה על אי-שכיחה של שום מרחק ועל אי-ספירה פעמיים של אותו מרחק. דרך אחרת היא לדמיין את הריבוע המלא ובו 15x15=225 מרחקים, ממנו יש להוריד את האלכסון (225-15=210) ואז לחלק לשניים, על מנת לקבל כי ישנם 105 מרחקים שונים.

כמו כן ניתן לחשב כך: $105 = \frac{14\times15}{2}$ =1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14

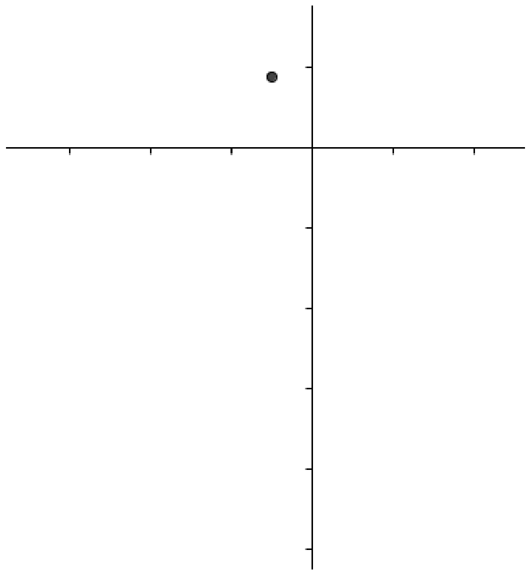
חזרה לתוכן העניינים

אלגברה – פונקציה ריבועית (רמה מתקדמת)

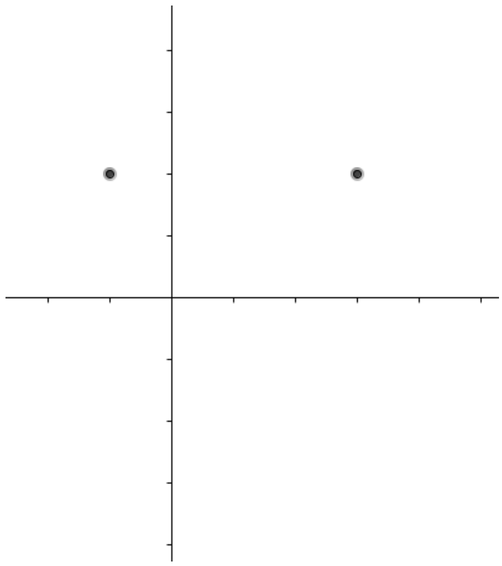
<u>שאלה 1</u>

להלן שרטוטים של עשר מערכות צירים. בכל מערכת מסומנות מספר נקודות. כמה פרבולות שונות (גרפים של פונקציות ריבועיות) עוברות דרך הנקודות הנתונות? אם לא קיימת פרבולה העוברת דרך הנקודות הנתונות, הסבירו מדוע.

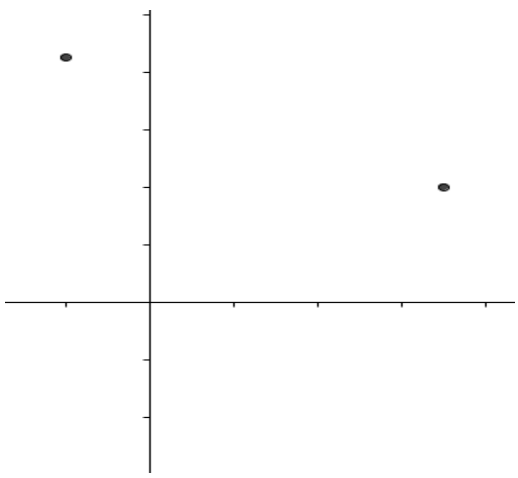
א.



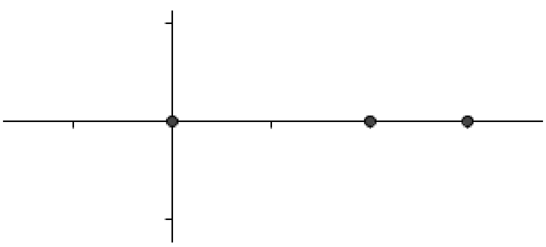
ב.



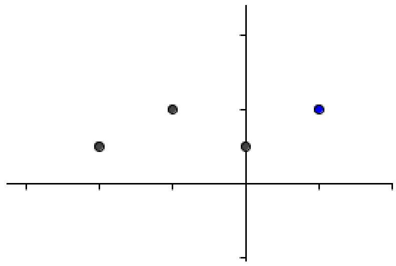
ג.



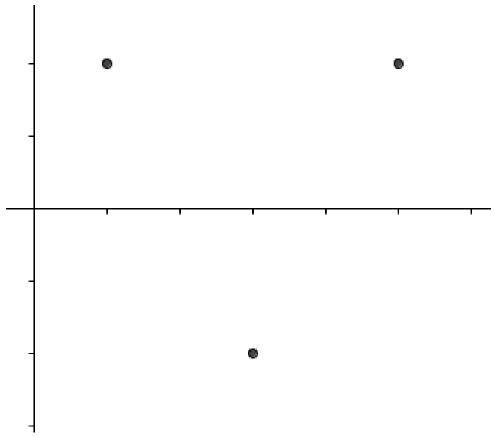
ד.



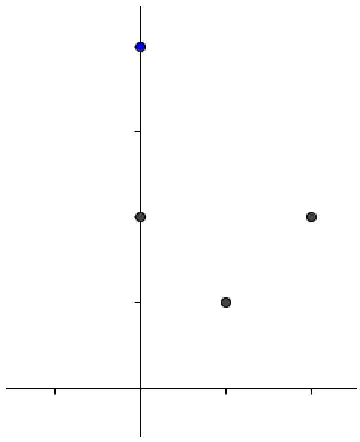
ד.



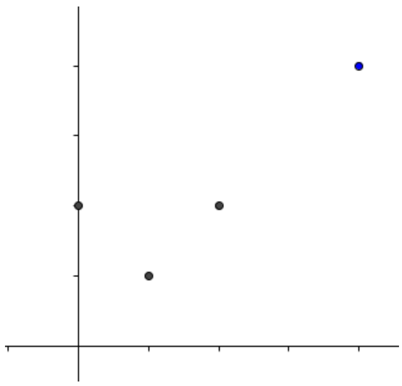
ה.



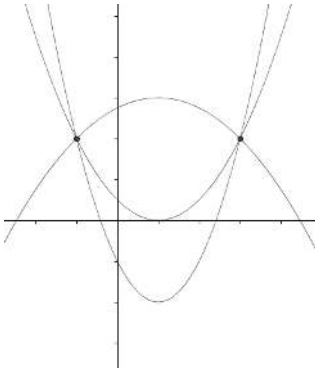
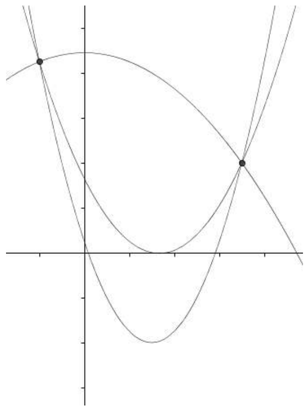
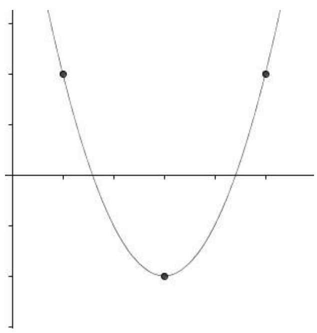
ו.

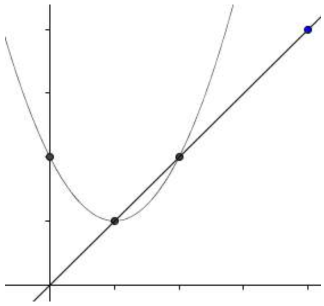


ז.



<u>פתרונות</u>

א. יש אינסוף פרבולות דרך נקודה אחת כלשהי.	ב. יש אינסוף פרבולות דרך שתי הנקודות הנתונות. 
ג. יש אינסוף פרבולות דרך שתי הנקודות הנתונות. 	ד. שלוש הנקודות נמצאות על ישר. הפונקציה דרכן היא קווית. אין פרבולה שמתלכדת עם פונקציה קווית.
ה. לא קיימת פרבולה דרך ארבע הנקודות הנתונות. אין פרבולה שעולה, יורדת, ושוב עולה.	ו. יש פרבולה אחת דרך שלוש הנקודות הנתונות. 

ז. ארבע הנקודות לא נמצאות על גרף של פונקציה, כי יש שתי נקודות בעלות אותו שיעור x (0). אם הייתה פונקציה כזאת, היא לא הייתה חד-ערכית.	ח. לא קיימת פרבולה דרך ארבע הנקודות הנתונות. שלוש הנקודות השמאליות קובעות פרבולה, והנקודה הרביעית נמצאת על הישר דרך שתי נקודות אחרות. 

<u>הערות והדגשים דידקטיים</u>

משימה זאת מתייחסת לגרף הפונקציה הריבועית ותכונותיו תוך הימנעות מטיפול בביטוי האלגברי שלה.
להלן כמה תובנות שאפשר להגיע אליהן מתוך עיסוק במשימה:

- בגלל הסימטריה של גרף הפונקציה הריבועית, שתי נקודות ששיעורי ה- y שלהן שווים קובעות באופן יחיד את שיעור ה- x של נקודת הקיצון (חצי המרחק בין שיעורי ה- x של הנקודות). אבל כיוון שנקודת הקיצון יכולה להיות מינימום או מקסימום, וכיוון שיש אינסוף אפשרויות לשיעור ה- y שלהן, קיימים אינסוף גרפים כאלה (סעיף ב).

- גם כאשר לשתי נקודות יש שיעורי y שונים, יש דרכן אינסוף פרבולות. נקודת הקיצון של הפרבולה לא תהייה באמצע הדרך בין שתי הנקודות הנתונות (סעיף ג).

- כל שלוש נקודות שאינן על אותו ישר קובעות פרבולה, אבל קשה להגיע למסקנה זו משיקולים גיאומטריים. למרות זאת, יש מצבים שבהם ניתן להצדיק אמירה זו. בסעיפים ה-ו נתונות שתי נקודות "סימטריות" (אותו שיעור y) ונקודה שלישית בה שיעור ה- xשלה הוא באמצע המרחק בין שיעורי ה-x של הנקודות הנתונות. נקודה זו חייבת להיות נקודת הקיצון של הפרבולה.

שאלה 2

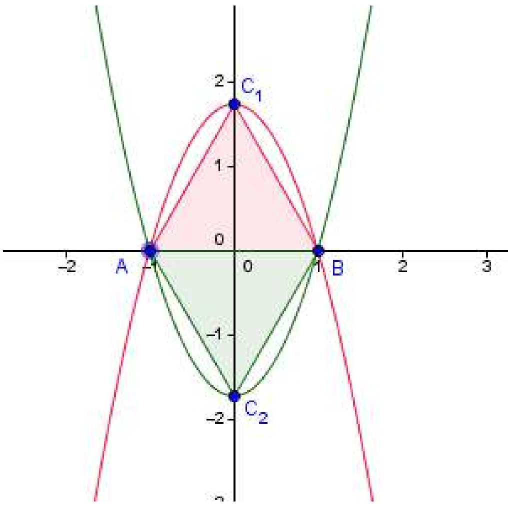
נתונות שתי נקודות במערכת צירים: A(-1,0), B(1,0).

א. מצאו נקודה שלישית C כך שהנקודות A, B, C יהיו קדקודים של משולש שווה צלעות. הבחינו בין מקרים שונים.

ב. מה היקף ומה שטח המשולש (או המשולשים) ABC?

ג. מצאו פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך הנקודות A, B ו- C. הבחינו בין המקרים השונים.

פתרונות והערות



א. בעזרת משפט פיתגורס מוצאים את שיעורי שתי האפשרויות עבור הנקודה C: $(0, \pm\sqrt{3})$.

ב. היקף: 6 יחידות אורך, שטח $\sqrt{3}$ יחידות שטח.

ג. הפונקציה המבוקשת היא מהצורה $f(x) = ax^2 \pm \sqrt{3}$. את הערך של a ניתן למצוא מתוך העובדה שהגרף עובר דרך הנקודה (-1,0). לדוגמה, עבור $f(x) = ax^2 + \sqrt{3}$ מתקבלת המשוואה: $0 = a \cdot 1^2 + \sqrt{3}$ ומכאן $a = -\sqrt{3}$.
לכן הביטוי האלגברי של הפונקציה הוא: $f(x) = \sqrt{3}x^2 \pm \sqrt{3}$

<u>שאלה 3</u>

כתבו ביטוי אלגברי ל:

א. פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך שני רביעים.

ב. פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך שלשה רביעים.

ג. פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרך ארבעת הרביעים רביעים.

ד. הסבירו למה לא קיימת פונקציה ריבועית שהגרף שלה נמצא כולו ברביע אחד.

<u>פתרונות והערות</u>

א. האפשרות היחידה לכך היא ששני הרביעים יהיו הראשון והשני, או השלישי והרביעי. במקרה הראשון $a>0$ ובמקרה השני $a<0$. גרף של פונקציה ריבועית שעובר דרך כל זוג אחר של ריבעים, היא בהכרח תעבור לפחות ברביע אחד נוסף.

ב. אם, למשל, נתון הגרף של הפונקציה הריבועית $f(x)=x^2$, מזיזים אותו אופקית שתי יחידות שמאלה ולאחר מכן מזיזים אותו מטה יחידה אחת יתקבל גרף שעובר דרך שלושה רביעים (ראשון, שני ושלישי). בדרך דומה ניתן ליצור דוגמאות רבות נוספות.

ג. בדומה לסעיף הקודם, אם, למשל, נתון הגרף של הפונקציה הריבועית $f(x)=x^2$ ומזיזים אותו מטה מספר כלשהו של יחידות, יתקבל גרף שעובר דרך כל ארבעת הרביעים.

ד. תחום כל פונקציה ריבועית הוא כל המספרים הממשיים, כלומר ניתן להציב בה מספר חיובי או שלילי כלשהו, משמע הגרף שלה חייב לעבור דרך שני רביעים לפחות.

שאלה 4

א. הציבו $x = 5$ ו- $x = 10$ בביטוי הריבועי $x^2 - 4x + 7$ וחשבו את הערך שמתקבל.

ב. מור שמה לב שכאשר הציבה 5 קיבלה תוצאה גדולה מ- 5, וכאשר הציבה 10 קיבלה תוצאה גדולה מ- 10. היא שיערה כי עבור כל מספר שהיא תציב התוצאה תהיה גדולה יותר מהמספר שהציבה. נסו מספרים אחרים וחפשו דוגמה נגדית להשערה של מור.

ג. דן בטוח כי ההשערה של מור נכונה עבור כל המספרים השליליים. מה יכולים להיות הנימוקים שלו?

ד. הציעו דרכים שונות לחקור את ההשערה של מור.

ה. החליפו את המספר 7 בביטוי הריבועי כך שיהיה לפחות מספר אחד שמפריך את ההשערה של מור.

פתרונות והערות

המשימה מתחילה כתרגיל הצבה בביטוי ריבועי וחישוב התוצאה, בדומה למשימות באלגברה בכיתה ז. המטרה של התחלה כזאת היא לעורר את הצורך הן להפעיל שיקולים אלגבריים והן לעשות שימוש בכלים מתאימים שנלמדו בכיתה ט (משוואות, אי-שוויונות, פונקציות וגרפים). כמו כן, המשימה מאפשרת לדון בתפקיד הדוגמא הנגדית להפרכת טענה והצורך בהוכחה כדי לאשרה (גם אם קיימות דוגמאות מאשרות רבות).

א. $5^2 - 4 \cdot 5 + 7 = 12$, $10^2 - 4 \cdot 10 + 7 = 67$

ב. מטרת החיפוש אחר דוגמאות נגדיות מיועדת לא רק לתרגול בהצבה בביטויים ריבועיים (ולחישוב התוצאה) אלא בעיקר לקבל תחושה לגבי ההשערה. כיוון שהתלמידים לא יצליחו למצוא דוגמא נגדית (כי ההשערה נכונה) ישנה הזדמנות לדיון כיתתי על הצורך בהוכחה.

ג. סעיף זה מאפשר הפעלת שיקולים אלגבריים מבוססים על "קריאה" מושכלת של הביטוי על מנת להיווכח כי כל הצבה של מספר שלילי (או אפס) תניב כתוצאה של ההצבה מספר חיובי, וכל מספר חיובי הינו גדול מכל מספר שלילי.

ד. <u>אפשרות א</u>: להציע את אי-השוויון $x^2 - 4x + 7 > x$ ולפתור אותו. כתיבת אי-השוויון מזמן תרגום של התנאי המילולי (תוצאת ההצבה גדולה מהמספר שהצבנו) לשפת האלגברה.
<u>אפשרות ב</u>: להשוות בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x + 7$ ו- $g(x) = x$. תלמידים רבים לא מודעים לכך כי ניתן לבטא את המספר שהצבנו כפונקציה $g(x) = x$.
<u>אפשרות ג</u>: ניתן לחשב את פונקצית ההפרש $f(x) - g(x)$ כ- $x^2 - 5x + 7$ ואת הביטוי הזה ניתן לכתוב כך (לאחר חילוץ ריבוע שלם): $(x - 2.5)^2 + 0.75$, ולשים לב כי הערך המינימלי של הפונקציה הוא 0.75 (כאשר $x = 2.5$), כלומר, פונקצית ההפרש תמיד חיובית.

ה. דיון כמו זה של אפשרות ג לעיל, מראה כי החלפת המספר 7 במספר שקטן מ- 6.25או שווה ל- 6.25 "מוריד" את גרף הפונקציה ומאפשר קיום הפרשים שליליים או אפס, כלומר $f(x) - g(x) \leq 0$. כל ביטוי $x^2 - 4x + c$ בו $c \leq 6.25$ יספק מספרים הסותרים את ההשערה.

שאלה 5

נתונה "משפחה" של פונקציות ריבועיות מהצורה $f(x) = x^2 + bx + c$ $(a = 1)$. בכל אחד מהמקרים הבאים מצאו ערכים מתאימים של b ושל c:

א. הקדקוד של הגרף הוא (0,0).

ב. הקדקוד של הגרף הוא על ציר ה- y.

ג. הקדקוד של הגרף הוא על ציר ה- x.

ד. הקדקוד של הגרף הוא על הישר $y = -3$.

ה. הקדקוד של הגרף הוא על הישר $x = 2$.

ו. הקדקוד של הגרף הוא על הישר $y = x$.

פתרונות והערות

א. $b = 0$ וגם $c = 0$

ב. $b = 0$

ג. $b^2 = 4c$

ד. $b^2 = 4(c + 3)$

ה. $b = -4$

ו. אם נזיז את הגרף של הפונקציה $y = x^2$ ימינה ולמעלה (או שמאלה ולמטה) באותו מספר יחידות d, תתקבל משפחה של פונקציות מהצורה $f(x) = (x - d)^2 + d$
כלומר: $f(x) = x^2 - 2d + d^2 + d$, ומכאן ש: $c = d^2 + d$; $b = -2d$. נבודד את d: $d = -\frac{b}{2}$, ונקבל

$$c = d^2 + d = \frac{b}{4}(b - 2)$$

שאלה 6

נתונה פונקציה ריבועית $f(x)$ בעלת התכונות הבאות:

- $f(-3) = f(1)$

- $f(x) \geq x$ לכל x

- הקדקוד הוא על ציר ה- x

א. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון, והראו כי היא חייבת להיות מינימום.

ב. שרטטו סקיצה של גרף של פונקציה המקיימת את התכונות וכתבו את הביטוי האלגברי שלה.

ג. מצאו ביטוי אלגברי לפונקציה נוספת.

ד. מצאו פונקציה ריבועית שמקיימת את שתי התכונות הראשונות, אך נקודת הקיצון איננה על ציר ה- y.

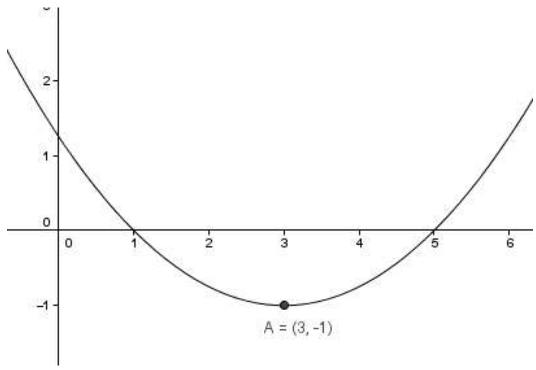
פתרונות והערות

א. סעיף זה מאפשר תרגול במשמעויות של סימוני פונקציות. למשל, התרגום של התכונה הראשונה $f(-3) = f(1)$ לייצוג הגרפי הוא ששיעורי ה- y של שתי הנקודות בהן שיעורי ה- x שלהן הם (-3) ו-1 הם זהים. לכן, ניתן לקבוע כי ציר הסימטריה של הפונקציה הוא $x = -1$. נקודת הקיצון, (-1,0), חייבת להיות מינימום, כי אחרת גרף הפונקציה יחתוך את הגרף של $f(x) = x$.

ב-ג. הנתונים עליהם יש להתבסס לצורך שרטוט הסקיצה של גרף הפונקציה הם נקודת המינימום והאזור הנמצא מעל הגרף של $f(x) = x$. ניתן לשרטט גרפים שונים שמקיימים אילוצים אלה. דרך אחת למצוא ביטוי אלגברי לגרף כזה היא על יד הזזה של יחידה אחת ימינה של גרף הפונקציה $f(x) = x^2$, על מנת לקבל $f(x) = (x+1)^2$. ניתן לבדוק כי בפונקציה זו אכן מתקיים ש- $f(-3) = f(1)$. תנאי זה ימשיך להתקיים עבור כל פונקציה ריבועית מהצורה $f(x) = a(x+1)^2$, בה $a > 0$.

ד. כל "העלאה" של גרף הפונקציות מהצורה $f(x) = a(x+1)^2$ תוביל לגרף של פונקציה שמקיימת את שני התנאים הראשונים. במלים אחרות, הפונקציות שמקיימות את שני התנאים הראשונים הן מהצורה $f(x) = a(x+1)^2 + c$ בהן $a > 0$ $c > 0$.

שאלה 7



נתון גרף של פונקציה שביטויה האלגברי הוא $f(x) = a(x-m)^2+n$. מינימום של הפונקציה הוא בנקודה (3, -1).

א. מצאו את ערכי m ואת n, והסבירו כיצד מצאתם.

ב. מצאו את ערכו של a.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

פתרונות והערות

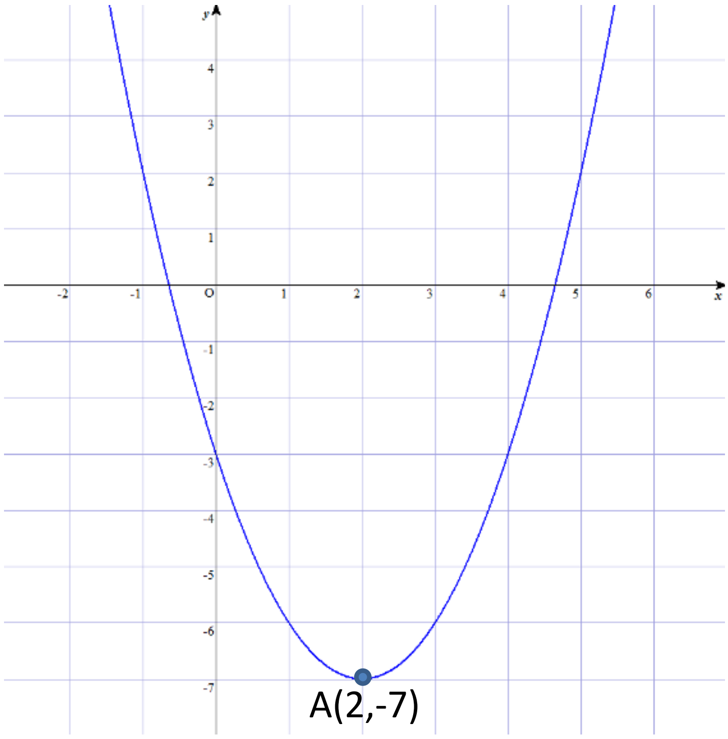
א. הגרף הנתון הוא הזזה של הגרף של $f(x) = x^2$, 3 יחידות ימינה ויחידה אחת למטה. מכאן ש: $m =$ $n = -13$;, והמשוואה היא $f(x) = a(x-3)^2-1$.

ב. כדי למצוא את הערך של a, נציב, למשל, את שיעורי הקדקוד (3, -1) בביטוי האלגברי $-1 = a(3-3)^2-1$. ההצבה הזאת אינה מאפשרת לקבוע את הערך של a, ולכן יש להיעזר באחת משתי הנקודות הידועות האחרות, למשל (1,0). במקרה זה, נקבל את המשוואה $0 = a(1-3)^2-1$ שפתרונה הוא $a = \frac{1}{4}$. ולכן הביטוי האלגברי של הפונקציה הוא: $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2-1$.

ג. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y ניתן למצוא על ידי כתיבת הביטוי האלגברי כך: $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2-1 = \frac{1}{4}x^2-\frac{6}{4}x+\frac{9}{4}-1$. וכאן ששיעורי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y הם $(0,\frac{5}{4})$.

<u>שאלה 8</u>

להלן גרף של פונקציה ריבועית.



א. מצאו לפחות שני נימוקים שונים כדי להראות שהגרף הנתון אינו הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x - 3$

ב. מצאו את הביטוי האלגברי של הפונקציה שהגרף שלה משורטט לעיל.

ג. הראו כי לגרף הפונקציה המשורטטת ולגרף הפונקציה שבסעיף א יש רק נקודה אחת משותפת.

<u>פתרונות והערות</u>

א. בדרך כלל נוטים להסתכל בחיתוך עם ציר ה- y כאפיון מזהה. במקרה זה, זה לא עוזר, כי הפונקציה הנתונה אכן עוברת בנקודת החיתוך שנראית בגרף. נימוקים אפשריים:

- ניתן להציב 1 , תוצאה ההצבה היא 2, אך הנקודה (1,2) איננה על הגרף הנתון. גם הצבה של נקודות אחרות מראות כי זה אינו הגרף המתאים.

- ציר הסימטריה של גרף הפונקציה הנתונה הוא 2-, ואילו ציר הסימטריה של הגרף הנתון הוא מספר חיובי.

ב. כדי למצוא ייצוג אלגברי של הגרף הנתון, נשים לב שזוהי הזזה אפשרית של הגרף של הפונקציה הפרבולה $f(x) = ax^2$ 2 יחידות ימינה ו- 7 יחידות למטה, ולכן ייצוגה: $f(x) = a(x-2)^2 - 7$. על מנת לברר את הערך של a נציב את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y (0, -3): $-3 = a(0-2)^2 - 7$. פתרון משוואה זו מראה כי $a = 1$ ואת הפונקציה ניתן לייצג כך: $f(x) = (x-2)^2 - 7$. פישוט של ביטוי זה נותן $f(x) = x^2 - 4x - 3$.

ג. למשוואה $x^2 + 4x - 3 = x^2 - 4x - 3$ יש רק פתרון אחד והוא $x = 0$, כלומר הנקודה היא נקודת החיתוך עם ציר ה- y.

שאלה 9

הוכיחו כי בפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$:

א. ציר הסימטריה הוא ציר ה- y אם ורק אם $b = 0$

ב. לגרף הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ואחת מהן היא ראשית הצירים, אם ורק אם $c = 0$ $(b{\neq}0)$

ג. אם $a = b = c$ (שונים מאפס) אז אין לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרונות והערות

שלושת הסעיפים בשאלה זו מאפשרים עיסוק בדיון בהוכחות במסגרת אלגברה, תוך יישום של תהליכי הוכחה דומים לאלה בהם התלמידים עוסקים בגיאומטריה. במסגרת הביטוי "אם ורק אם", ניתן לעסוק בהבדל בין משפט והמשפט ההפוך לו וכיצד זה מתבטא בתהליך ההוכחה (מה נלקח כנתון ומה צריך להוכיח). המשפטים אינם מורכבים והם די מיידים להוכחה.

א. יש להוכיח כי:

- אם ציר הסימטריה הוא ציר ה- y אזי $b = 0$

הוכחה: משוואת ציר ה- y היא $x = 0$, ומכיוון ששיעור ה- x של ציר הסימטריה הוא נתון על ידי $x = -\frac{b}{2a}$, מתקבל כי $-\frac{b}{2a}$ חייב להיות אפס, וזה קורה כאשר $b = 0$.

- אם $b = 0$ אזי ציר הסימטריה הוא ציר ה- y

הוכחה: אם $b = 0$, אזי גם $-\frac{b}{2a} = 0$, אך $-\frac{b}{2a}$ מציין את שיעור ה-x של הקדקוד של גרף הפונקציה, ואם הוא אפס אז משוואת ציר הסימטריה היא $x = 0$.

ב. יש להוכיח כי:

- אם $c = 0$ אזי לגרף הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ואחת מהן היא ראשית הצירים.

הוכחה: אם $c = 0$, אזי נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x על ידי פתרון המשוואה $ax^2 + bx = 0$. על מנת לפתור, נכתוב $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$ולכן או $x = 0$ או $(ax + b) = 0$, כלומר, $x = \frac{-b}{a}$. במלים אחרות, תמיד יש לגרף שתי

נקודות חיתוך עם הצירים ואחת מהן היא ראשית הצירים (כי אם נציב $x=0$ ב- $f(x)=ax^2+bx$

נקבל $f(0)=0$.

- אם לגרף הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ואחת מהן היא ראשית הצירים, אזי $c=0$.

<u>הוכחה</u>: לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x: $(0,0)$ ו- $(k,0)$ $(k \neq 0)$.

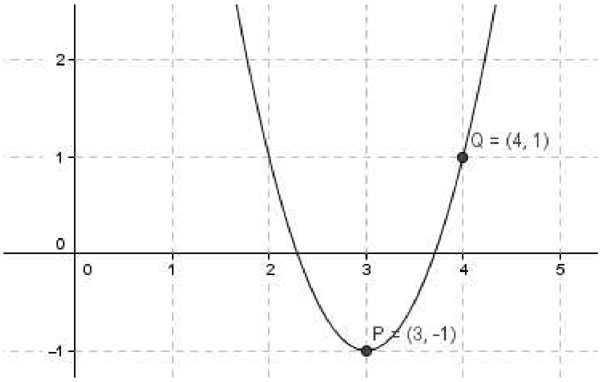
לכן ניתן לכתוב את הביטוי האלגברי של הפונקציה בעזרת מידע זה, כך $f(x)=a(x-0)(x-k)$, ולאחר פישוט: $f(x)=ax^2-akx$, כלומר ביטוי מהצורה $f(x)=ax^2+bx+c$ בו $c=0$.

ג. <u>הוכחה</u>: אם $a=b=c\neq0$, אזי ניתן לכתוב את הביטוי האלגברי של הפונקציה, למשל, כך: $f(x)=ax^2+ax+a$. כדי למצוא את נקודות החיתוך, יש לפתור את המשוואה $ax^2+ax+a=0$, אך במשוואה זו הדיסקרימיננטה היא $\sqrt{(a^2-4a^2)}$, והיא תמיד שלילית. כלומר אין פתרון למשוואה, ולכן אין נקודות חיתוך עם הצירים.

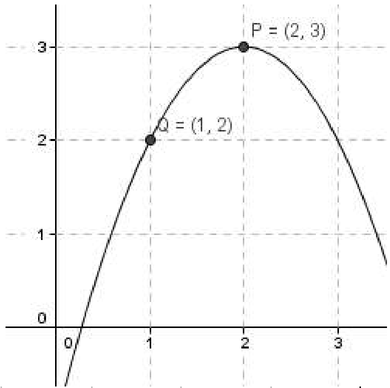
שאלה 10

נתונים גרפים של שלוש פונקציות ריבועיות. בכל גרף מסומנת נקודת הקיצון ושיעוריה ושיעורים של נקודה נוספת על הגרף. עבור כל אחד מהגרפים, מצאו את הביטוי האלגברי של הפונקציה בצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$.

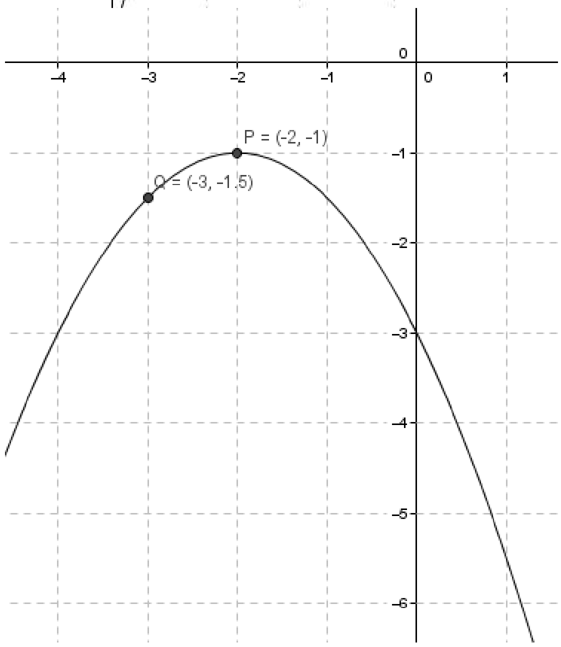
א.



ב.



ג.



פתרונות והערות

גרף של כל פונקציה ריבועית נתונה יכול להיחשב כהזזה מסוימת (ימינה או שמאלה ולמעלה או למטה) של גרף הפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2$. אם נתונים שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה (שיעורי הקדקוד של הפרבולה), ניתן לרשום את הפונקציה המוזזת באופן הבא: $f(x) = a(x-m)^2 + n$, (m, n) הם שיעורי הקדקוד, השיעור הראשון מציין את היחידות ואת הכיוון של ההזזה האופקית והשיעור השני את היחידות והכיוון של ההזזה האנכית של הקדקוד (ושל כל הפונקציה). בגרפים נתונים שיעורי הקדקוד של הפרבולה ולכן כל מה שנותר לחשב הוא הערך של a וזאת עושים על ידי הצבת השיעורים של הנקודה השנייה הנתונה ופתרון משוואה כתואר להלן.

א. $f(x) = a(x-3)^2 - 1$, מציבים את שיעורי הנקודה $(4,1)$ ומתקבל המשוואה $1 = a(4-3)^2 - 1$, ועל ידי פתרון מוצאים כי $a = 2$. לכן, הביטוי האלגברי של הפונקציה הוא: $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$. ניתן למצוא את נקודות החיתוך אם ציר ה- x ולהיווכח כי הן אכן מתאימות (באומדן ראייה) למה שמסומן בגרף.

ב. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

ג. $f(x) = -0.5x^2 - 2x - 3$

שאלה 11

נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ וידוע כי שיעורי נקודות החיתוך של הגרף שלה עם ציר ה- x הן P(-1,0) ו- Q(3,0).

א. הציעו ערכים אפשריים ל- a, b ו- c. הסבירו כיצד מצאתם.

ב. הציעו ערכים אחרים ל- ל- b ו- c כאשר הערך של a הוא הנגדי לערכו בסעיף א.

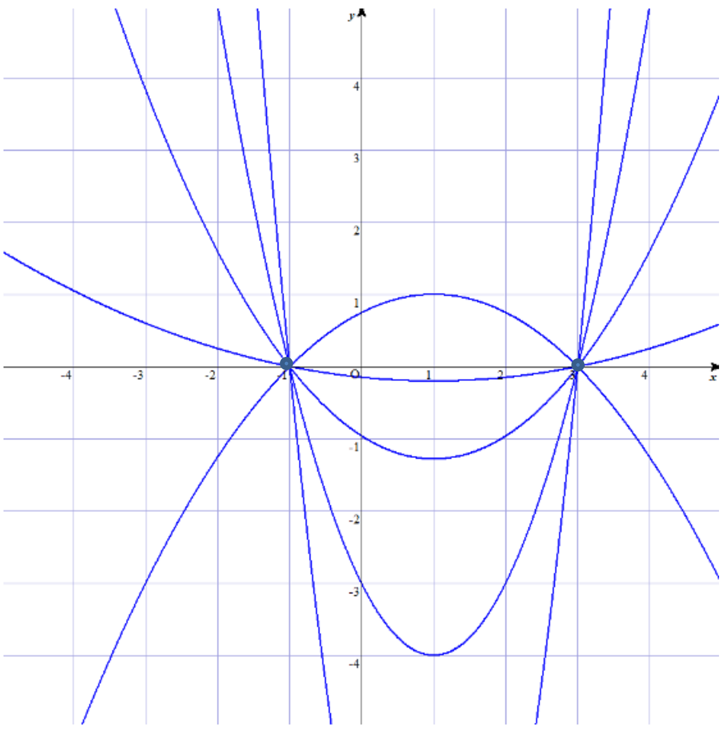
ג. הציעו ערכים אחרים ל- a, b ו- c כאשר הפעם הערך של a הוא פי 3 מערכו בסעיף א.

ד. ידוע שגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה (0,1). מצא את הערכים של a, b ו- c.

ה. u הוא מספר כלשהו (חיובי או שלילי). האם תמיד קיימת פונקציה ריבועית העוברת בנקודות P ו- Q, ובנקודה $(0, u)$? אם כן, כתבו את הביטוי האלגברי שלה, ואם לא הסבירו.

פתרונות והערות

א. רצוי לדון עם התלמידים תחילה על כך שיש יותר מפונקציה ריבועית אחת שאלה נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x . יהיו תלמידים שיראו מיד שיש לפחות שתיים (אחת בה הקדקוד הוא מקסימום והשנייה בה הוא מינימום). ניתן להשתכנע גם חזותית על די התבוננות בשרטוט הבא:



ישנן דרכים שונות למצוא את הערכים של המקדמים a , b ו- c. למשל:

- ניסוי וטעיה. ניתן לשחק עם ערכי המשתנים כך שהנוסחה לפתרונות המשוואה הריבועית יהיו $x = -1$ ו - $x = 3$. אפשרות זו עלולה להיות מייגעת וגם לא להניב תוצאות גם לאחר מספר רב של ניסיונות.
- ניתן להסתמך על כתיבת הביטוי האלגברי ש לפונקציה ריבועית על בסיס השורשים שלה, כך: $f(x) = a(x-3)(x+1)$, לקבוע כרצוננו את הערך של a (בתנאי שהוא שונה מאפס), ולפשט. כל ביטוי שיתקבל ייצג פונקציה ריבועית בה P ו- Q הן נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x.
- אם P ו- Q הן נקודות החיתוך עם ציר ה- x, אזי ציר הסימטריה חייב להיות $x = 1$. מכאן, ששיעור ה- x של הקדקוד של כל פרבולה (שאלה נקודות החיתוך שלה עם הציר) יהיה 1. את שיעור ה- y של הקדקוד ניתן לקבוע כרצוננו. מכאן ניתן להמשיך כמו בפתרון לשאלה 10 לעיל.
- אם ציר הסימטריה חייב להיות $x = 1$, אזי $\frac{-b}{2a} = 1$. במילים אחרות חייב להתקיים הקשר $-b = 2a$. ניתן לבחור ערך עבור a (שונה מאפס), למשל 1 ואז נקבע הערך של b (במקרה שבחרנו, זה יהיה 2-). את הערך של c ניתן למצוא על ידי הצבה בנוסחת המשוואה הריבועית של הערכים של a, של b ושל שיעור ה- x של נקודת החיתוך עם ציר ה- x.

רצוי שתלמידים יתנסו בדרכים אלה, בין אם הן מוצעות על ידם בין אם המורה מציע אותן. העיסוק בדרכים חלופיות אלה מהווה סיכום ושילוב של נושאים רבים שנלמדו.

ב. ניתן להראות בדרכים שונות כי החלפת הערך של a בנגדי לו, כך שלמשוואה יהיו אותם השורשים גוררת החלפת b ו- c בנגדיים שלהם. למשל, על ידי פישוט שלשני הביטויים $a(x-p)(x+q)$ ו- $-a(x-p)(x+q)$ והשוואת המקדמים. ניתן להיווכח כי אכן אם מחליפים את ערכי המקדמים בערכים הנגדיים שלהם בנוסחה לפתרון משוואה ריבועית, אכן מתקבלים אותם השורשים.

ג. ניתן לעשות ניתוח דומה לזה של הסעיף הקודם.

ד. לפני שמתחילים לפתור, רצוי להסב את תשומת לב התלמידים לגרף. על פי הנתונים, רואים כי לגרף יהיה מקסימום, כלומר שערך המקדם a יהי שלילי. ניתן לפתור בדרך דומה לזו של שאלה 10 לעיל, ולקבל כי הפונקציה היא: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

ה. ברור כי u יכול להיות כל מספר חוץ מאפס (כי במקרה זה תהיינה שלוש נקודות על ישר אחד ואין פרבולה שעוברת דרכן). במקרה זה, $c = u$, $b = \frac{2u}{3}$, $a = -\frac{u}{3}$.

שאלה 12

א. הציבו שני מספרים שונים במקום c בביטוי האלגברי $f(x) = x^2 + x + c$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ב. הציבו שני מספרים שונים במקום b בביטוי האלגברי $f(x) = x^2 + bx + 3$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ג. הציבו שני מספרים שונים במקום a בביטוי האלגברי $f(x) = ax^2 + x + 3$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ד. הציבו שני מספרים שונים במקום a בביטוי האלגברי $f(x) = ax^2 + ax$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

פתרונות והערות

שאלה זו מאפשרת העלאת שיקולים אלגבריים וגרפיים על מנת להצדיק או להסביר את אותה הטענה. לפני שניגשים לפתור שאלה זו, מומלץ לדון עם התלמידים על כמה נקודות משותפות יכולות להיות לגרפים של שתי פונקציות ריבועיות שונות, ולבקש מהם להציע דוגמאות גרפיות לכל מקרה.

א. תלמידים יוכלו להעלות את הטיעון כי שינוי במקדם c, מעלה או מוריד (תלוי אם הגדלנו או הקטנו את המקדם) את כל גרף הפונקציה "במקביל" לפונקציה המקורית. ולכן, לא יתכן שיהיו לשני הגרפים נקודות משותפות. ניתן להצדיק זאת גם אלגברית על ידי השוואה (הרכבת משוואה) של שני הביטויים האלגבריים הבאים $x^2 + x + c = x^2 + x + d$. הפתרון היחיד למשוואה זו הוא $c = d$, שמשמעותו היא שאין נקודות משותפות אלא אם כן שתי הפונקציות זהות.

ב. מהסתכלות בביטוי האלגברי, כאשר משתנה רק הערך של המקדם b, רואים כי הגרפים של שתי הפונקציות עדיין חותכות את ציר ה- y באותה נקודה. נשאלת השאלה האם יתכן שיש עוד נקודת חיתוך בין שני הגרפים. אך, למשוואה $x^2 + bx + 3 = x^2 + dx + 3$ יש רק פתרון אחר והוא $x = 0$, כלומר אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y, ורק היא.

ג. השיקולים לפתרון הם זהים לאלה של הסעיף הקודם.

ד. לגרפים של כל הפונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + ax = ax(x+1)$ יש אותן שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x, (0,0) ו- (-1,0), ללא כל קשר לערך של a ($a \neq 0$).

שאלה 13

להלן ארבעה זוגות של פונקציות. ציינו בעבור כל זוג, האם לגרפים שלהם יש נקודות משותפות? הסבירו.

א. $f(x) = (x-10)^2$ ו- $g(x) = (x+10)^2$

ב. $h(x) = x^2 + 4x + 4$ ו- $l(x) = -x^2 + 4x - 4$

ג. $p(x) = x^2 + 5x + 6$ ו- $q(x) = 2x^2 + 10x + 12$

ד. $t(x) = x^2 + 8x - 1$ ו- $s(x) = 8x - 1$

פתרונות והערות

בפתרון שאלה זו רצוי לעודד שיקולים מילוליים, גרפיים ואלגבריים ככל שזה ניתן.

א. בהסתכלות בביטויים האלגבריים רואים כי כאשר $x > 0$, הערכים של $g(x)$ תמיד גדולים מהערכים של $f(x)$. כאשר $x < 0$, הערכים של $g(x)$ תמיד קטנים מהערכים של $f(x)$. לכן, יתכן רק ערך אחד עבורו הפונקציות שוות והוא כאשר $x = 0$, וזאת יכולים לראות מהתבוננות בביטויים עצמם. ניתן גם לפתור את המשוואה הבאה $x^2 + 20x + 100 = x^2 - 20x + 100$, ולמצוא כי הפתרון היחיד הוא $x = 0$. אפשר גם לשרטט את שני הגרפים, האחד הוא הזזה 10 יחידות ימינה של $f(x) = x^2$ והשנייה 10 יחידות שמאלה, ולראות היכן הגרפים נחתכים (רק פעם אחת).

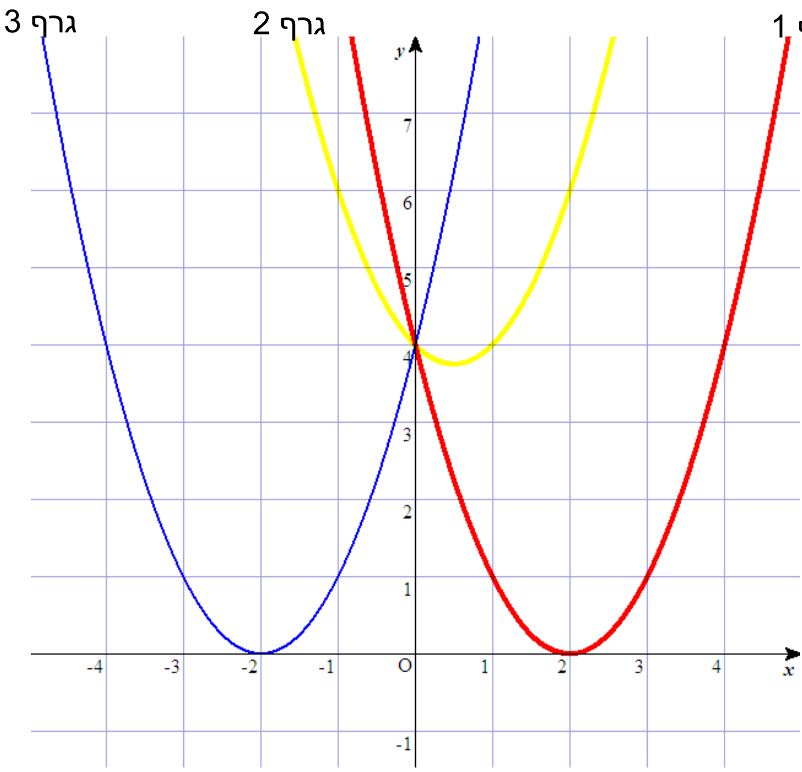
ב. ההשוואה בין $h(x)$ ו- $l(x)$ מראה כי, בגלל שיש להם איבר אמצעי זהה $4x$, הפונקציות תהיינה שוות כאשר $x^2 + 4 = -x^2 - 4$. אך אין מספר שווה לנגדי שלו.

ג. מהסתכלות בביטויים האלגבריים, רואים כי $q(x) = 2p(x)$, ולכן השורשים של הפונקציה האחת יהיו גם השורשים של השנייה ואלה שתי הנקודות המשותפות. ניתן לדון עם התלמידים במסקנה הכללית לגבי הכפלת כל המקדמים של פונקציה באותו מספר.

ד. ניתן לראות כי הערכים של $t(x)$ הם הערכים של $s(x)$ ועוד מספר שמועלה בריבוע (כלומר, תמיד חיובי, אלא אם כן הוא אפס). לכן הערכים של $t(x)$ יהיו תמיד גדולים יותר מהערכים של $s(x)$ אלא אם כן $x = 0$. ולכן יש להם רק נקודה אחת משותפת והיא (0,1). אם נשרטט את הגרפים, נראה את נקודת ההשקה ואת הפרבולה תמיד מעל הגרף של הישר.

<u>שאלה 14</u>

להלן שלושה גרפים של פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא: $f(x) = x^2 + bx + 4$.



א. הראו כי נקודת החיתוך

ב. הנקודות (2,0) ו- (-2,0) הם קדקודים של הגרפים 1 ו-3 בהתאמה. מצאו את הערך של b בעבור שתי פונקציות אלה.

ג. מה יכולים להיות הערכים של b אם לגרף הפונקציה יש שתי נקודות חיתוך אם ציר ה- x? נקודה אחת?

ד. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $y = 1$ עם כל אחד מהגרפים שבשרטוט.

ה. מצאו ערך של b כך שגרף הפונקציה לא יעבור ברביע הרביעי.

ו. הסבירו מדוע עבור כל ערך של b, גרף הפונקציה עוברת ברביע השני.

פתרונות והערות

סעיפים א ו- ב ניתנים לפתור על ידי הצבה וחישוב. בסעיף ב, יהיו תלמידים שיזהו את הביטוי של ריבוע של סכום שני איברים ויסיקו ממנו את הערך של b.

ג. בדיקת הדיסקרימיננטה $\sqrt{(b^2-16)}$ מראה את שני המקרים בהם גרף לגרף הפונקציה יש רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x והם גרף 1 ו גרף 3. כאשר $b^2 > 16$ (כלומר, כאשר $b > 4$ או $b < -4$), לגרף יהיו שתי נקודות חיתוך עם הציר.

ד. עם גרף 1: (1,1) ו- (3,1) , עם גרף 2 אין נקודות חיתוך ועם גרף 3: (1,1-) ו- (3,1-). ניתן למצוא על ידי פתרון משוואות ובדיקת התוצאות בגרפים.

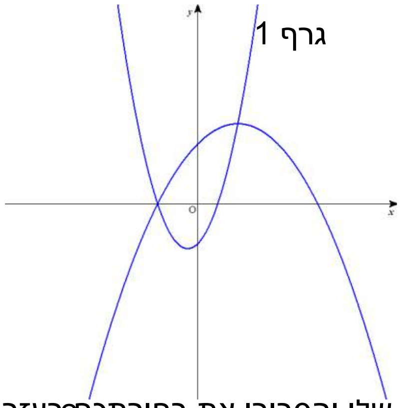
ה. שלושת הגרפים המשורטטים מקיימים תנאי זה. דוגמא נוספת, ניתן להזיז את גרף 3 יחידה אחת למטה, ולקבל גרף של פונקציה שאינו עובר דרך הרביע הרביעי. ניתן גם לדון עם התלמידים ניתוח כללי, למשל, ברביע הרביעי, שיעור ה- x של נקודות הוא תמיד חיובי ושיעור ה- y הוא תמיד שלילי. התבוננות בביטוי x^2+bx+4, מעלה כי כאשר $b \geq 0$, אין אפשרות לקבל תוצאה שלילית בהצה של x חיובי, כלומר הפונקציה לא תעבור ברביע הרביעי. ניתן להראות כי זה גם נכון עבור $b \geq -4$. בעזרת כלים טכנולוגיים ניתן להראות כיצד "נע" הגרף כאשר משנים את הערכים של b.

ו. כל גרף "צוחק", כלומר גרף בו הקדקוד הוא מינימום, חייבת לעבור דרך הרביע השני. בנוסף ניתן להראות כי עבור כל ערך של b, תמיד יהיה אפשר למצוא הצבה של מספר שלילי שתוצאה חיובית.

שאלה 15

להלן הגרפים של שתי פונקציות ריבועיות

$f(x)=(x-1)(x+2)$ ו- $f(x)=-0.25(x+2)(x-6)$



א. התאימו לכל גרף את הביטוי האלגברי שלו והסבירו את בחירתכם בעזרת שני נימוקים לפחות.

ב. באיזה גרף נמצאת הנקודה (12,-21)? הסבירו כיצד מצאתם.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. מצאו את שיעורי הקדקודים של שני הגרפים.

ה. מצאו את אורך הקטע המחבר את שני הקדקודים.

פתרונות והערות

א. את ההתאמה ניתן לבצע על ידי:

- הסתכלות בשורשים
- בדיקת הסימן של המקדם a
- מציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- y

ב. מהסתכלות בלבד ניתן לקבוע בוודאות כי הנקודה נמצאת על גרף 2, וניתן לאשר זאת על ידי הצבה.

ג. מהסתכלות הן בגרף והן בגורם $(x+2)$ המשותף לשני הביטויים האלגבריים, ניתן לראות כי הנקודה (-2,0) נמצאת על שני הגרפים. מה שנותר הוא להשוות את הגורמים הנוספים, כלומר לפתור: $-0.25(x-6)=x-1$ ולמצוא כי הנקודה השנייה היא (2,4).

ד. את שיעורי הקדקודים ניתן למצוא, למשל, על ידי מציאת ציר הסימטריה, שהוא $x = -0.5$ עבור גרף 1, ו- $x = 2$ עבור גרף 2. לכן הקדקודים הם: (-2.25 ,-0.5) ו- (2,4) בהתאמה.

ה. בעזרת משפט פיתגורס, ניתן למצוא כי אורך הקטע הוא 6.73 (בקירוב).

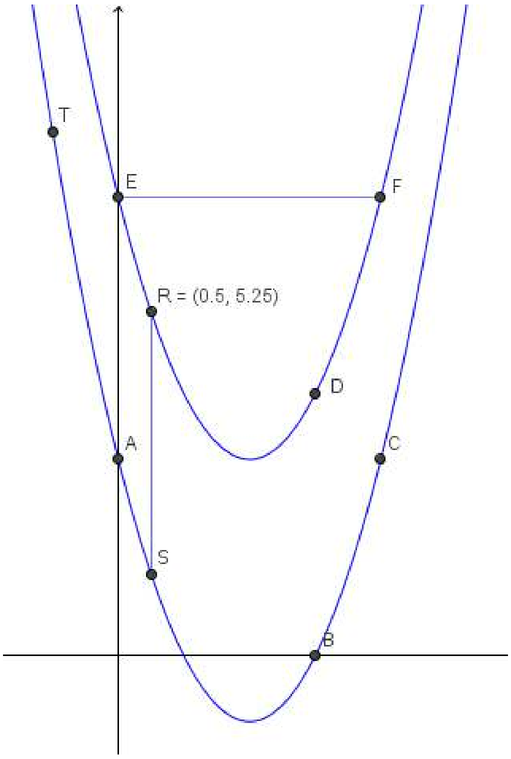
<u>שאלה 16</u>

שתיים מתוך ארבע הפונקציות הבאות משורטטות בגרף:

$f(x) = (x-2)^2 - 1$ $\qquad$ $g(x) = x^2 - 4x + 7$

$h(x) = (x+2)^2 - 1$ $\qquad$ $k(x) = (x-2)^2 + 7$

בכל סעיף נמקו את תשובותיכם.



א. התאימו כל אחד משני הגרפים לביטוי האלגברי שלו (מתוך הרשימה).

ב. מצאו את שיעורי ארבע הנקודות A, B, C, D אם ידוע כי הישר BD מקביל לציר ה- y וישר AC מקביל לציר ה-x .

ג. ידוע כי הקטע RS מקביל לציר ה- y. מצאו את אורכו.

ד. מעבירים דרך נקודה T ישר מקביל לציר ה- y. ישר זה חותך את גרף הפרבולה העליונה בנקודה U (לא מסומנת בסרטוט). האם אפשר לקבוע את אורך הקטע TU? אם כן, מה אורכו? אם לא נמקו.

ה. ידוע כי הקטע EF מקביל לציר ה- x. מצאו את אורכו.

ו. מצאו את שטח המשולש BCD.

ז. הוכיחו כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

פתרונות והערות

א. שני הגרפים הם הזזה ימינה של הפונקציה $f(x) = x^2$, ולכן הפונקציה $h(x)$ נפסלת. הפונקציות $g(x)$ ו- $k(x)$ מוזזות כלפי מעלה, ולכן אחת מהן מתאימה לגרף העליון, ופונקציה $f(x)$ מוזזת למטה, ולכן מתאימה לגרף התחתון. הבחירה בין $g(x)$ ו- $k(x)$ מבוססת על הנקודה R(0.5, 5.25) שמתאימה רק לגרף של $g(x)$.

ב. A(0, 3) על פי $f(x)$. B(3, 0) על פי על פי $f(x)$. C(4, 3) סימטרית לנקודה A יחסית לישר $x = 2$. D(3, 4) על פי $g(x)$.

ג. כל נקודה בגרף של פונקציה $g(x)$ היא הזזה אנכית של נקודה (בעלת אותו שיעור ה- x) בגרף של $f(x)$. לכן אורך הקטע RS=4. זאת ניתן לראות כי אורכו כערך הקטע EA, אותו ניתן לחשב כהפרש של המקדמים החופשיים של שתי הפונקציות. כמו כן, ניתן לחשב את אורך הקטע כהפרש בין שיעורי ה- y של הנקודות R ו- S, אחד מהם נתון ואת השני ניתן למצוא על ידי הצבה.

ד. משיקולים זהים לאלה שבסעיף הקודם, אורך הקטע הוא 4.

ה. EF הינו הזזה אנכית של הקטע AC, שאורכו 4.

ו. אורך הבסיס BD=4. הגובה לבסיס זה הינו המרחק האופקי ל- C - יחידה אחת. לכן שטח המשולש הוא 2 יחידות שטח.

ז. קל לבדוק שהשיפועים של AB ושל DC שניהם 1-, ולכן ABCD טרפז. על פי משפט פיתגורס $AD = BC = \sqrt{10}$.

שאלה 17

נתונות שתי פונקציות ריבועיות: $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x^2 + 7$.

א. הראו בשתי דרכים שונות כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים.

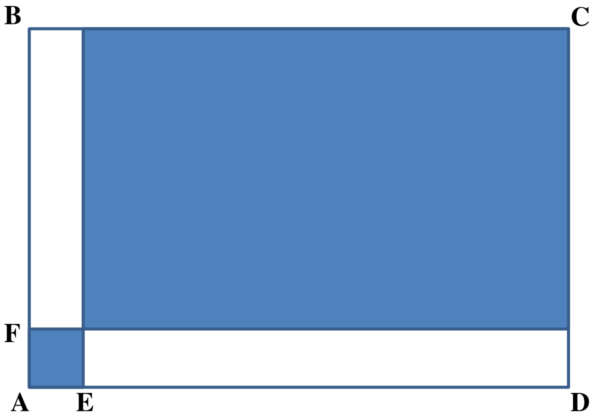
ב. שנו רק את המקדם 2 בפונקציה $f(x)$, כך שלשתי הפונקציות יהיו נקודות חיתוך. הראו כי שינוי זה לא מאפשר שתהיה רק נקודת חיתוך אחת.

ג. עבור אלו שינויים של המקדם 2 בפונקציה $f(x)$ יהיו לשתי הפונקציות נקודות חיתוך ועבור אלו שינויים לא יהיה נקודות חיתוך? הסבירו.

ד. מצא מקדם לפונקציה $f(x)$ כך שיעורי ה- x של נקודות החתוך של שתי הפונקציות יהיו 1 ו- 1-.

שאלה 18

במלבן שבשרטוט נתון כי האורך של AB הוא 20 ס"מ והאורך של BC הוא 30 ס"מ. כמו כן, נתון כי אורך הקטע AF שווה לאורך הקטע AE.



שני ילדים משחקים את המשחק הבא: הראשון בוחר אורך עבור AE, מחשב את השטח הצבוע ורושם את התוצאה כנקודות לזכותו. השחקן השני רושם לזכותו כנקודות את תוצאת חישוב השטח הנותר (הלא צבוע). המנצח הוא השחקן שקיבל את מירב הנקודות.

א. השחקן הראשון בחר באורך קטע של 13 ס"מ עבור AE. חשבו את הנקודות שיקבלו הוא ויריבו.

ב. לאחר בחירת אורך קטע, השחקן הראשון קיבל 292 נקודות. באיזה אורך קטע הוא בחר? כמה נקודות קיבל השחקן השני?

ג. האם יתכן מצב שבו בחירת השחקן הראשון תוביל לתיקו? אם כן, מתי, אם לא הסבירו.

ד. עבור אלו ערכים של AE מובטח הניצחון לשחקן הראשון?

ה. מה הוא מספר הנקודות הגדול ביותר שיכול לקבל השחקן השני?

ו. האם יתכן כי החלקים הצבועים יהיו שניהם ריבועיים? הסבירו.

<u>פתרונות והערות</u>

בעיה זו מתאימה לנושא בעיות מילוליות הניתנות לפתרון בעזרת משוואות ריבועיות, כמו כן, היא משלבת ידע בסיסי בגיאומטריה (חישובי שטחים, תכונות של ריבועים ומלבנים, למשל בסעיף ו).

השרטוט שניתן כדי לאייר את המצב המדגים בחירה של אורך קטע כך שסכום השטחים הצבועים הוא גדול באופן בולט לעין מסכום השטחים הלא צבועים, ולכן בחירה זו תזכה את השחקן הראשון ביותר נקודות מאלה של יריבו. רצוי לדון עם התלמידים על מצבים שונים ולבחון אותם "על פי העין" על מנת (א) להבין היטב את המצב ולהתיידד עמו, ו- (ב) ליצור את הצורך בחישוב, כדי שהתלמידים ייווכחו כי לא תמיד ברור כיצד בחירות שונות של אורך קטע משפיעות על גודל השטחים.

א. סעיף זה מיועד להתנסות בחישוב מספרי. החישוב מהווה גם הכנה לבניית הביטוי הסימבולי שיאפשר לנתח את כלל המצבים של הבעיה.
אם הבחירה של אורך הקטע הוא 13 ס"מ, שטח הריבוע הצבוע הוא 169 סמ"ר ושטח המלבן הצבוע הוא (20-13)(30-13), כלומר, בסך הכול השטח הצבוע הוא 288 סמ"ר. היריב יקבל 312 נקודות (600-288).

ב. יתכן ויהיו תלמידים שינסו לנחש תחילה את האורך ולבדוק את הניחוש, מומלץ להקדיש כמה דקות לכך כדי לתרגל את החישוב ואולי כי יתכן שתלמידים מסוימים יגיעו לאחד הפתרונות ותלמידים אחרים לפתרון השני וזה יצור ענין מיוחד. כמו כן, יהיו תלמידים שינסו לבסס את הניחוש על ידי השוואה בין תוצאת החישוב של הסעיף הקודם ולתוצאה המובאת בסעיף זה, ולהסיק ממנו ערכים אפשריים של האורך. ההתנסות כזו עם מספרים לצורך "ניחוש" פתרון עשויה לתמוך בהבנה טובה של הבעיה וכהקדמה לטיפול/למודל האלגברי שיבוא, הן בעזרת משוואות והן בעזרת פונקציות ואשר יבהירו את הבעיה בשלמותה.
המשוואה הריבועית המתקבלת אותה יש לפתור היא: $x^2+(30-x)(20-x)=292$. למשוואה זו שני פתרונות אפשריים לאורך: 11 ס"מ ו- 14 ס"מ.

ג. ניתן לייצג מצב של תיקו על ידי אחת משלוש האפשרויות: השוואה של השטח הצבוע ל-300 (חצי שטח המלבן), השוואה של השטח הלא צבוע ל-300 (חצי משטח המלבן) או השוואה של השטח הצבוע לשטח הלא צבוע. תתקבלנה בהתאמה שלוש משוואות: $x^2+(30-x)(20-x)=300$

$$(30-x)x+(20-x)x=300$$

$$x^2+(30-x)(20-x)=(30-x)x+(20-x)x$$

בכל מקרה, יתקבלו שני הפתרונות $x=10$ ו- $x=15$.

ד. על מנת להבטיח ניצחון לשחקן הראשון יש להפוך את אחת המשוואות שהתקבלו בסעיף הקודם לאחד מאי-השוויונות הבאים:

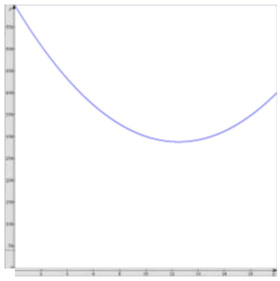
$x^2+(30-x)(20-x)<300$

$(30-x)x+(20-x)x>300$

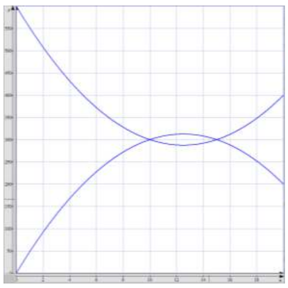
$x^2+(30-x)(20-x)>(30-x)x+(20-x)x$

לחילופין ניתן לבחון את הפונקציה $f(x)=2x^2-50x+600$ (המייצגת את השטח הצבוע התלוי באורך AE שנבחר), את שורשיה (שכבר חושבו בסעיף ג' לעיל) ואת תחום ההגדרה. לגבי תחום ההגדרה, יהיו תלמידים שיציינו $0\le x\le 30$ כי AE≤30. אך בדיקת האיור מראה כי AE≤20. לכן,

גרף הפונקציה הוא:



ניתן לבחון את מצבי הניצחון של שני השחקנים (כמו כן, מצבי תיקו) גם בעזרת הגרפים של הפונקציה המתארת את מספר הנקודות של השחקן השני ולהשוות ביניהן:

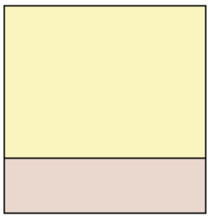


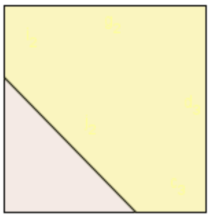
ה. מספר הנקודות הגדול ביותר שיכול לקבל השחקן השני הוא כאשר הפונקציה $g(x)=600-(2x^2-50x+600)=-2x^2+50x$ מקבלת את הערך הגדול ביותר, כלומר בקדקוד הפרבולה. זה קורה אם השחקן הראשון בוחר AE=12.5, מצב שמקנה לו 287.5 נקודות והשחקן השני זוכה ב- 312.5 נקודות. העובדה שנקודת הקיצון מתקבלת כאשר AE=12.5 נובעת גם מסעיפים קודמים. ראינו בסעיף ב' ש- $f(11)=f(14)$. בגלל הסימטריות של הפרבולה ניתן להסיק שנקודת הקיצון היא באמצע המרחק בין 11 ל- 14.

ו. לא יתכן – כי למשוואה 20-x=30-x אין פתרון.

<u>שאלה 19</u>

למלי מגרש ריבועי מגודר ששטחו 64 מ"ר. בחלקו היא רוצה לגדל כרוב ובחלקו השני בקר. על מנת שהבקר לא יאכל את הכרוב ,עליה להוסיף גדר פנימית בין החלקים .היא מתלבטת בין שתי אפשרויות :גדר במקביל לצלע ,או במקביל לאלכסון הריבוע (ראו ציור).





א. מה הוא האורך המקסימלי של הגדר בשני המקרים?

ב. אם מלי רוצה לחלק את השטח לשני חצאים ,באיזו אפשרות כדאי לה לבחור על מנת לחסוך בגדר?

ג. אם השטח לגידול כרוב יהיה שמינית משטח השדה ,באיזו אפשרות כדאי לבחור כדי לחסוך בגדר?

ד. עבור איזו חלוקת שטח ,אורך הגדר בשני המקרים שווה?

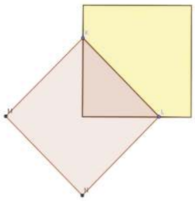
ה. בחלוקה השנייה נוצרים משולש ומחומש. מה אורך הגדר אם שטח המחומש הוא 46 מ"ר?

<u>פתרונות והערות</u>

א. צלע הריבוע 8 מטרים. זהו אורך הגדר המרבי במקרה הראשון. במקרה השני, אורך האלכסון הריבוע הוא $8\sqrt{2} \approx 11.31$ מטר.

ב. על פי החישוב למעלה – מקביל.

ג. גדר מקבילה לצלע תהייה תמיד באורך 8 מ'. גדר באלכסון צריכה לעבור בין אמצעי הצלעות, ואורכה יהיה $4\sqrt{2} \approx 5.66$ מ'. האלכסון עדיף.



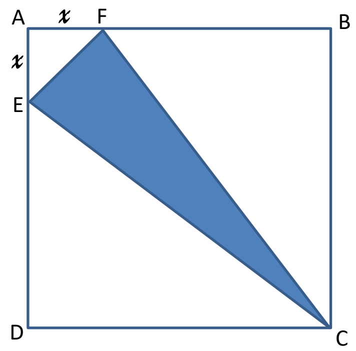
ד. עבור רבע משטח המגרש, כלומר 16 מ"ר. ניתן להראות זאת בעזרת חישובי פיתגורס, אבל יש דרך פשוטה יותר, המוצגת בשרטוט הבא:

אם אורך הגדר כאורך צלע הריבוע, הרי ששטח הריבוע המסובב כשטח המגרש, ושטח המשולש המגודר בדיוק רבע משטח הריבוע.

ה. אם שטח המחומש 46 מ"ר, אזי שטח המשולש 18 מ"ר. על פי השיקולים בסעיף הקודם, אותו משולש הוא רבע מריבוע ששטחו 72 מ"ר וצלעו $\sqrt{72} \approx 8.49$ מ"ר.

שאלה 20[1]

אורך צלע הריבוע ABCD היא 10 ס"מ. בריבוע חסום משולש ECF, כך ש- $AE = AF = x$.



א. מצאו ביטוי אלגברי לפונקציה המבטאת את שטח המשולש כפונקציה של x.

ב. מהו תחום הפונקציה?

ג. באיזה מקרה יהיה שטח המשולש שווה ל- 49.5 סמ"ר?

ד. מהו השטח הגדול ביותר האפשרי, ומתי הוא מתקבל?

פתרונות והערות

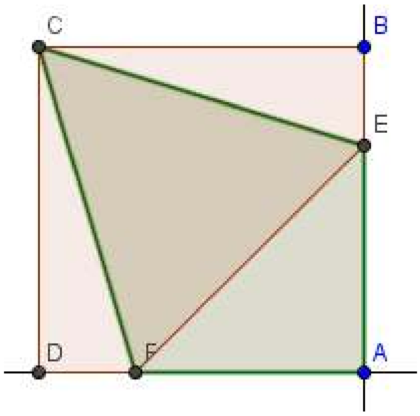
א. יש דרכים רבות להראות ששטח המשולש הוא $10x - \frac{1}{2}x^2$. דרך אחת היא להחסיר משטח הריבוע את השטח של שלושה משולשים ישרי זווית (EAF, EDC ו- FBC). למשולשים EDC ו- FBC יש ניצבים שאורכם 10 ו- $10 - x$, ולמשולש EAF שני ניצבים שווים שאורכם x. לכן, ביטוי לשטח המסומן הוא:

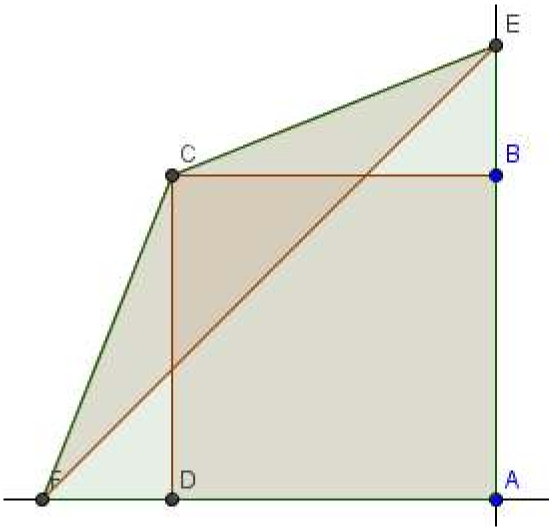
$$100 - 10(10 - x) - \frac{1}{2}x^2 = 10x - \frac{1}{2}x^2$$

דרך אחרת להראות שהשטח הוא $10x - \frac{1}{2}x^2$ היא להתבונן בדלתון EAFC, אשר אורכי אלכסוניו AC ו- EF הם $10\sqrt{2}$ ו- $x\sqrt{2}$ בהתאמה. לכן שטחו $10x$. משטח זה של החסיר את שטח המשולש EAF שהוא $\frac{1}{2}x^2$. היתרון בדרך זו, היא שניתן להרחיבה למצב בו $x > 10$.

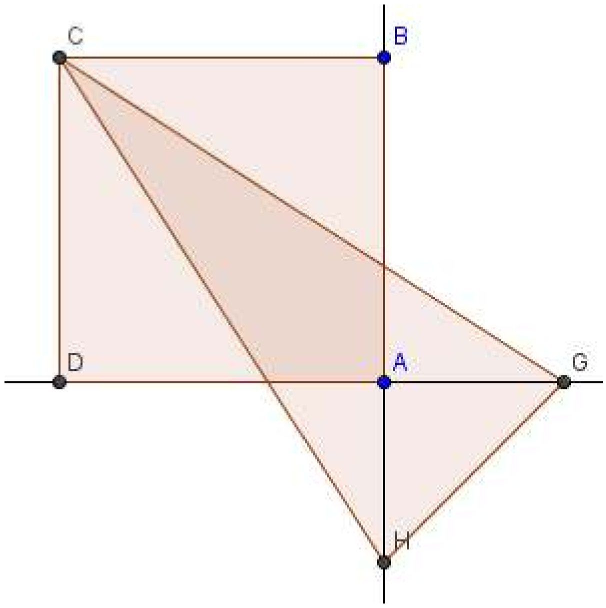
[1] בהשראת שאלה ז.30 (עמוד 131) מתוך הספר "שאלון אלגברי" (מהדורה מורחבת), הוצאת חידוש בע"מ. את הספר במלואו ניתן למצוא ב: http://stwww.weizmann.ac.il/menu/Disciplines/math_history_books/Algebra_questions.pdf

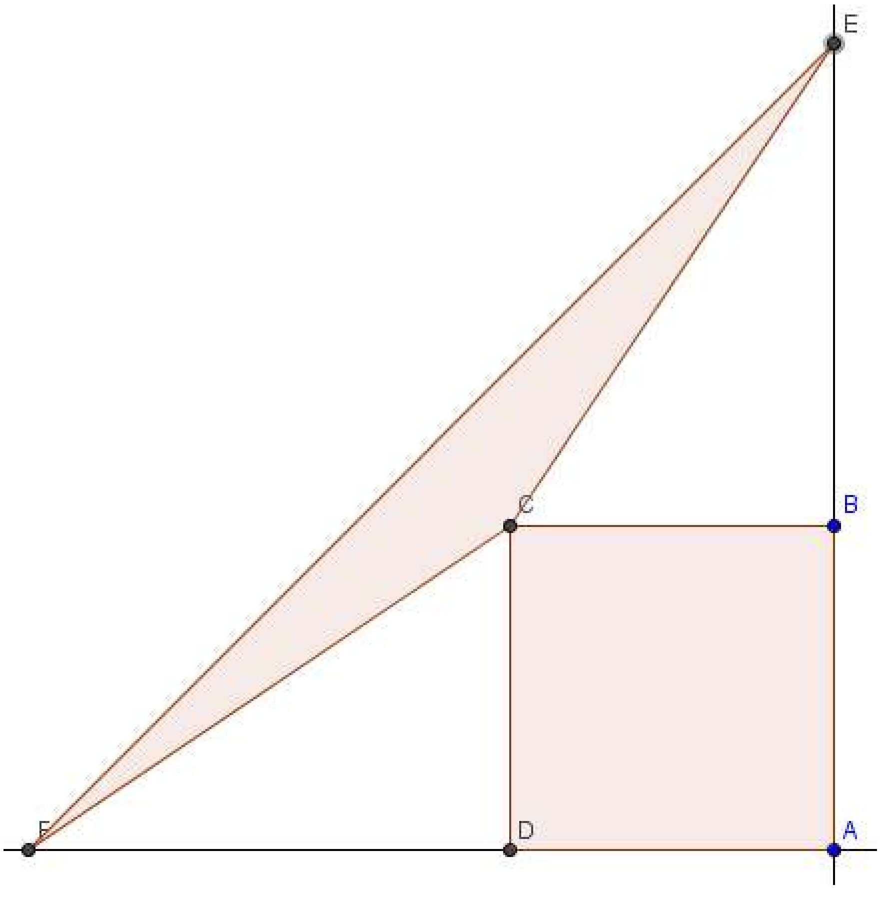
ב. בנשי השרטוטים הבאים, מובא אותו מצב, אך "מסובב" על מנת להדגים כיצד ייראה מצב בו מאפשרים למשולש להמשיך לגדול אל מעבר לתחום $x \le 10$.





ניתן לקיים דיון מעניין בשאלה האם אנחנו רשאים להתייחס לערכים גדולים מ- 10 כאל תחום ההגדרה של הבעיה. יתרה מזאת, האם המשתנה יכול להיות גדול מ- 20 או קטן מאפס? ניתן ל"מתוח" את המצב הגיאומטרי ולהיווכח כי המשולש עדיין קיים במצבים האלה. הפונקציה נותנת ערך שלילי במקרים האלה, אבל בערך מוחלט זהו אכן השטח.





כלומר, אם מבינים את התנאי בתור "הנקודה F היא על הקטע AB", אזי תחום התחום הוא $0 \leq x \leq$ 10. אבל אין סיבה לא להרחיב למצב שנקודה F נמצאת על המשך הצלע לכיוון B. אפשר אפילו

להרחיק לכת ולאפשר ל- F להימצא על המשך הצלע לכיוון A (x שלילי) או לאפשר ל- x לגדול מעבר ל-20, ולקבל שטח משולש שלילי.

ג. פתרון המשוואה הריבועית מראה כי שטח המשולש שווה ל- 49.5 סמ"ר כאשר $x = 9$ או $x = 11$. שני פתרונות אלה מזמינים תלמידים לתהות שוב לגבי תחום ההצבה שייקבע (האם הוא יכלול את 11?).

ד. הפונקציה מקבלת ערך מקסימאלי של 50 כאשר x=10. שוב, ניתן לשאול אם לא כדאי לקחת בחשבון ערכים מחוץ לתחום $0 \leq x \leq 20$. אם נאפשר משולשים עבור x מחוץ לתחום זה, ערך הפונקציה יהיה שלילי, אבל שטח המשולש המתקבל יהיה גדול כרצוננו, כלומר לא יהיה מקסימום.

שאלה 21[2]

היקפו של גיליון נייר מלבני הוא 70 ס"מ. על גיליון זה הודפסה תמונה מלבנית באופן שנותרו שוליים ברוחב 2 ס"מ מכל צד (וגם מלמעלה ומלמטה).

א. מה היו ממדי הגיליון אם שטח התמונה 180 סמ"ר?

ב. מה היו ממדי הגיליון אם שטח התמונה 50 סמ"ר?

ג. מה היו ממדי הגיליון אם שטח התמונה 200 סמ"ר?

ד. מהו שטח התמונה הגדול ביותר שניתן להדפיס על גיליון מלבני שהיקפו 70 ס"מ תוך השארת שוליים כמתואר? הסבירו.

ה. מהו שטח התמונה הקטן ביותר שניתן להדפיס על גיליון מלבני שהיקפו 70 ס"מ תוך השארת שוליים כמתואר? הסבירו.

פתרונות והערות

היקף התמונה המלבנית הוא 54 ס"מ, שכן כל אחת מצלעות התמונה קצרה ב- 4 ס"מ מצלע הגיליון. במילים אחרות, סכום האורכים של שתי צלעות סמוכות של התמונה הוא 27 ס"מ (חצי היקף). השאלות הבאות דנות בשאלה של מכפלת שני מספרים (שטח המלבן) כאשר סכומם קבוע וידוע (27). אם נסמן את אורך אחת הצלעות ב- x, שטח התמונה יהיה $x(27-x)$. אם נסמן ב- x צלע של הגיליון (ולא של התמונה המודפסת), הרי ששטח התמונה המודפסת יהיה $(x-4)(31-x)=-x^2+35x-124$. אפשר לעבוד גם פונקציה זו, אבל החישובים יהיו פחות נוחים.

א. אם שטח התמונה 180 סמ"ר, אז אורך צלע התמונה מקיימת את המשוואה הבאה: $x(27-x)=180$ אשר פתרונותיה 12 ו- 15. אמנם שני פתרונות, אך הם קובעים רק מלבן אחד אפשרי. במצב הזה ממדי הגיליון הם 19×16.

ב. פתרונות המשוואה $x(27-x)=50$ הם 2 ו- 25, וממדי הגיליון הם 29×6.

[2] בהשראת שאלה מתוך הספר "שאלון אלגברי" (מהדורה מורחבת), הוצאת חידוש בע"מ. את הספר במלואו ניתן למצוא ב: http://stwww.weizmann.ac.il/menu/Disciplines/math_history_books/Algebra_questions.pdf

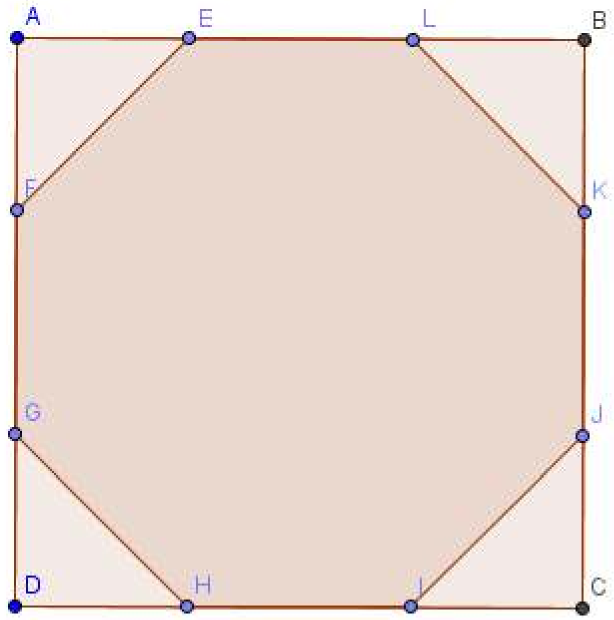
ג. למשוואה $x(27-x)=200$ אין פתרונות. שטח התמונה לא יכול להיות 200 סמ"ר אם היקף הגיליון הוא 70 ס"מ.

ד. שטח מלבן בעל היקף נתון הוא הגדול ביותר כאשר אורכי צלעותיו שווים, כלומר הוא ריבוע. במקרה שלפניו אפשר להביא טיעון יותר ממוקד - לפונקציה $f(x)=x(27-x)$, אשר מתאפסת ב- 0 וב- 27, יש מקסימום כאשר $x=13.5$. המקסימום הוא $13.5^2=182.25$, וזהו שטח התמונה המקסימלי.

ה. פונקצית השטח $f(x)=x(27-x)$ מקבלת ערך מינימאלי של 0 כאשר $x=0$ או $x=27$, אבל מצבים אלה לא באמת מתאימים לתנאי הבעיה שבה x הוא אורך צלע של תמונה מלבנית. כאשר אורך אחת הצלעות הוא 0, אין מלבן. מדויק יותר לומר שלפונקציה השטח לא קיים ערך מינימאלי, וזאת במובן שבהינתן מלבן שהיקפו 54 ס"מ, ולא משנה כמה שטחו קטן, תמיד אפשר למצוא מלבן אחר שהיקפו 54 ס"מ ושטחו קטן יותר. את זאת נעשה על ידי הקטנת הצלע הקטנה (אם אורך הצלע חיובי, תמיד יש מספר חיובי קטן יותר), והגדלת הצלע הארוכה באותה מידה. במושגים של פונקציות וגרפים, לכל נקודה מעל ציר ה- x של הגרף של הפונקציה $f(x)=x(27-x)$ יש נקודה קרובה יותר לציר ה- x שעדיין לא נוגעת בו. עשוי להתפתח דיון סביב היבטים פיסיקאליים של השאלה. אם x הוא אורך צלע של תמונה מלבנית מודפסת, הרי שיש אילוצים על ערכי x האפשריים שנובעים מרזולוציית המדפסת ומתכונות צמיגות של הדיו.

שאלה 22[3]

בשרטוט הבא נתון כי ABCD ריבוע ,וכי כל המשולשים הם שווה שוקיים וחופפים.



א. הוכיחו כי כל זוויות המתומן EFGHIJKL שוות.

ב. נתון כי אורך צלע הריבוע הוא 10 יחידות אורך. עינת ודלית חישבו מה צריך להיות אורך צלע המתומן על מנת שיהיה משוכלל. הן החליטו לסמן ב- x את הקטע AE, ולכן גילו ש- $EL = 10 - 2x$. מכאן נפרדו דרכיהן: דלית מצאה כי על ידי יישום משפט פיתגורס במשולש LBK, מתקבל כי $LK = \sqrt{2}x$. וכיוון שחייב להתקיים כי $LK = LE$, היא פתרה את המשוואה המתאימה. מצאו את אורך צלע המתומן על פי דרכה של דלית.

ג. עינת רשמה ש- $LK = 10 - 2x$ והשתמשה אף היא במשפט פיתגורס, אך היא רשמה אותו כך: $x^2 + x^2 = (10 - 2x)^2$. מצאו את אורך צלע המתומן על פי דרכה של עינת. האם עינת ודלית קיבלו תוצאות זהות?

ד. רון בחר לסמן דווקא את אורך צלע המתומן ב- x. הציעו כיצד הוא פתר את הבעיה.

---

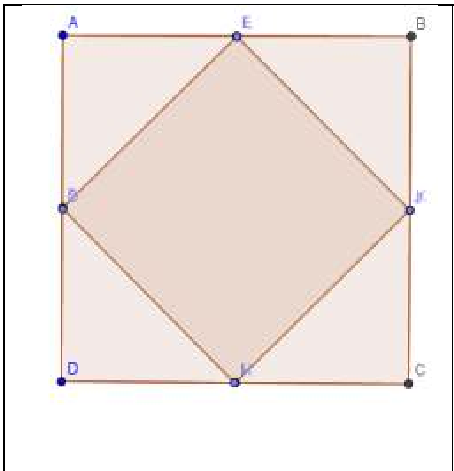
[3] שאלה זו פותחה בהשראת המאמר:
Farrell, M.A. & Ranucci, E.R. (1973). On the Occasional Incompatibility of Algebra and Geometry. *Mathematics Teacher* 66, pp. 491-497.

<u>פתרונות והערות</u>

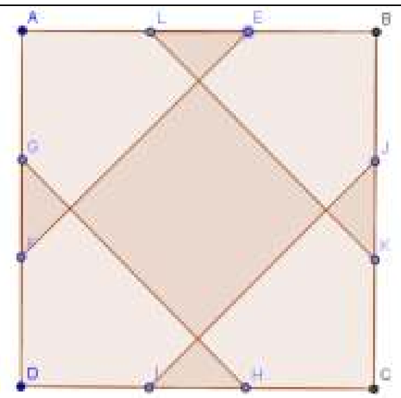
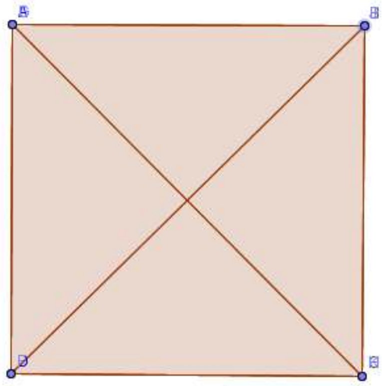
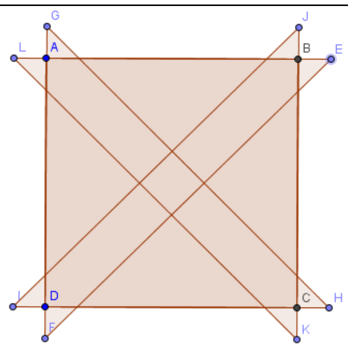
א. כיוון שארבעת המשולשים הם חופפים והם שווי שוקיים וישרי זווית, שתי הזוויות השוות הן בנות $45°$.
זוויות המתומן הן צמודות לזוויות המשולש וכן הן כולן בנות $135°$.

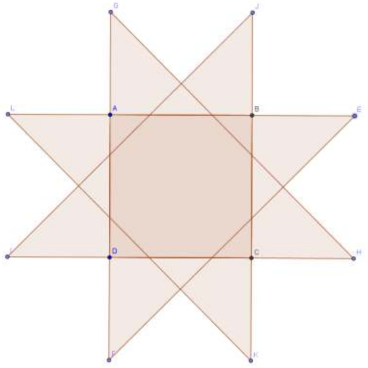
ב. דלית תפתור את המשוואה $\sqrt{2}x = 10 - 2x$ ותגלה ש- $x = \frac{10}{2+\sqrt{2}} \approx 2.93$. מכאן תסיק שאורך צלע המתומן $10 - 2x \approx 4.14$.

ג. עינת תפתור את המשוואה הריבועית $x^2 + x^2 = (10 - 2x)^2$ ותקבל שני פתרונות: $x = 10 \pm \sqrt{50}$. אחד הפתרונות הוא זהה לפתרון של דלית: $2\sqrt{50} - 10 \approx 4.14$. לפי הפתרון השני, $x = 10 + \sqrt{50} \approx 17.07$ מתקבל אורך צלע שלילי (!) עבור המתומן: $-10 - 2\sqrt{50} \approx -24.14$. פתרון זה גדול בערכו המוחלט מהפתרון הראשון בדיוק ב- 20 יחידות אורך. הכיצד? יש מי שיבטל פתרון זה כלא מתאים לתנאי הבעיה, אבל דווקא מעניין לברר האם יש לו משמעות בכל זאת. על מנת לפענח מצב זה נדרש הרבה דמיון. שימוש בתוכנה של גיאומטריה דינאמית יכול לעזור. אם נבנה את המתומן באופן כזה שקדקודיו יכולים לצאת מהריבוע, נוכל לעקוב אחר המתרחש.



אם נגרור את הקדקוד E ימינה לכיוון קדקוד L, כאשר E מגיע למרכז צלע הריבוע הוא מתלכד עם L, ואז מתקבל מתומן שארבע מצלעות נעלמות (בעלות אורך 0). המתומן בעצם הפך לריבוע.

כאשר ממשיכים לגרור את קדקוד E ימינה מ"עבר" ל- L, (L זזה שמאלה) המתומן כבר איננו מצולע, כי הוא חותך את עצמו, אבל עדיין יש לו שמונה צלעות - ארבע ארוכות וארבע קצרות. כיוון שהקדקוד E חלף על פני הקדקוד L, האורך של צלע LE ייחשב שלילי.	
כאשר קדקוד E מתלכד עם B מקבלים שוב צורת ריבוע. הפעם מחצית צלעות של המתומן בעלות אורך 10, או 10-, אם לדייק (FG, HI, וכו') ומחציתן בנות אורך $10\sqrt{2}$ (EF, GH, וכו').	
כאשר ממשיכים לגרור את E ימינה מתקבל מתומן עוד יותר מוזר.	

אם נגרור את E די רחוק, נקבל לבסוף מעין מתומן משוכלל שכל "צלעותיו" בנות 24.14 יחידות אורך $(10+2\sqrt{50})$ כפי שחזה פתרון המשוואה.	

ד. כאשר רון יציב את צלעות משולש AEF במשפט פיתגורס, הוא יקבל את המשוואה הבאה: $2(\frac{10-x}{2})^2 = x^2$. למשוואה זו יש אותם שני פתרונות כמו למשוואה של עינת: $-10 \pm 2\sqrt{50}$.

שאלה 23[4]

נתון ריבוע שאורך צלעו x ס"מ. מאריכים את אורך הצלע ב- 5 ס"מ.

ה. מה שטח הריבוע החדש?

ו. בטאו בכמה גדל שטח הריבוע (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של אורך הצלע המקורי x.

ז. הראו בשרטוט בכמה גדל השטח. נסו לקשר בין השרטוט לבין הביטוי שמצאתם בסעיף הקודם.

ח. מה תחום ההגדרה של הפונקציה כפי שבא לידי ביטוי בבעיה זו?

ט. רקפת מצאה ריבוע ששטחו בדיוק הוכפל (פי 2) כאשר היא האריכה את הצלע ב- 5 ס"מ. מה היה אורך הצלע המקורית שלה?

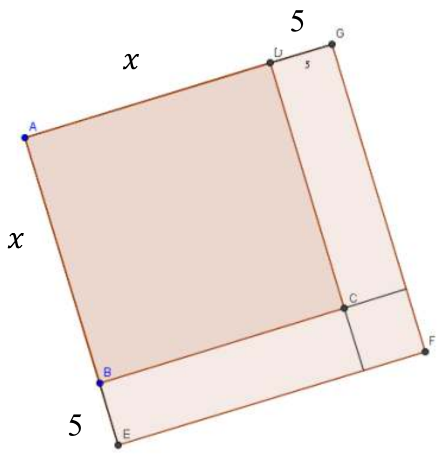
י. מצאו עבור אילו ריבועים יגדל השטח פי 2, עבור אילו יגדל פחות מפי 2, ועבור אילו יגדל יותר מפי 2. בחקירתכם אתם יכולים להשתמש בפונקצית ההפרש שביטאתם בסעיף ב.

פתרונות והערות

א. $(x+5)^2$

ב. $(x+5)^2 - x^2 = 10x + 25$

ג. בשרטוט ניתן לראות שהתווספו לריבוע המקורי שני מלבנים ששטח כל אחד מהם $10x$, וריבוע אחד ששטחו 25.

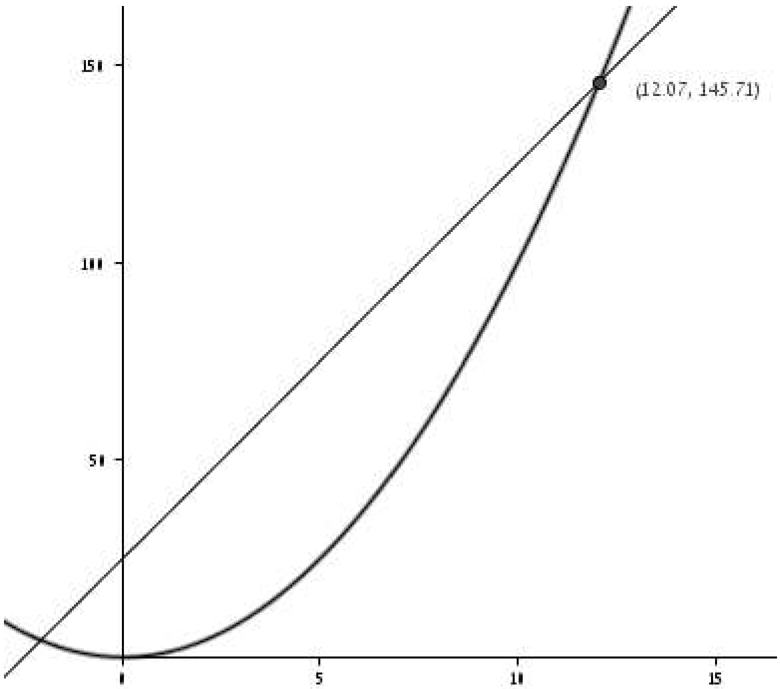


[4] שאלה זו והנגזרות ממנה בהמשך, פותחו בהשראת המאמר "הרפתקאות הנדסיות בעזרת מושג הפונקציה" מאת רנה הרשקוביץ ואברהם הרכבי, *שבבים, עלון למורי מתמטיקה, תיק מס' 24*. ניתן למצוא ב:
http://stwww.weizmann.ac.il/menu/Disciplines/disciplines1_5a_he.html

ד. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = 10x + 25$ הוא כל המספרים, אבל בהקשר של הבעיה, x מציין אורך צלע של ריבוע ולכן התחום במקרה זה $x > 0$.

ה. רקפת הגדילה את השטח ב- x^2 סמ"ר. נפתור את המשוואה: $10x + 25 = x^2$ ונקבל (בתחום החיובי) $x = 5 + \sqrt{50} \approx 12.07$ ביחידות ס"מ.

ו. עלינו להשוות את פונקצית גידול השטח $f(x) = 10x + 25$ לפונקצית השטח המקורי x^2. הגרף מתאר את שתי הפונקציות. כאשר צלע הריבוע x קטן מ- 12.07 ס"מ הגידול בשטח גדול מהשטח המקורי, כלומר, השטח גדל ביותר מפי 2. כאשר צלע הריבוע x גדול מ- 12.07 ס"מ הגידול בשטח קטן מהשטח המקורי, כלומר השטח גדל בפחות מפי 2.



שאלה 24

נתון ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ. מאריכים את אורך הצלע ב- x ס"מ.

א. מה שטח הריבוע החדש?

ב. כתבו ביטוי לגידול שטח הריבוע (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של x.

ג. מה תחום ההגדרה של הפונקציה בבעיה זו?

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. דן מצא ערך של x שבדיוק מכפיל (פי 2) את שטח הריבוע המקורי. בכמה הוא הגדיל את אורך הצלע?

ו. אביטל מצאה ערך של x שמקטין פי 2 את שטח הריבוע המקורי. מהו הערך של x? האם לדעתכם ערך זה מתאים לתיאור הבעיה?

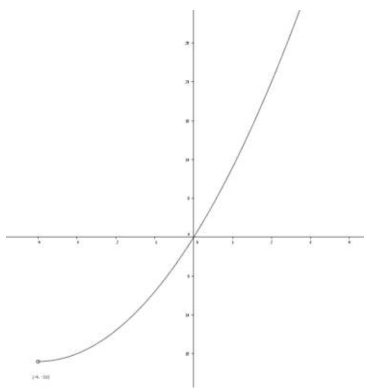
פתרונות והערות

א. $(4+x)^2$

ב. $(4+x)^2-16=8x+x^2$

ג. ניתן להתייחס להארכה שלילית של קטע כאל קיצורו. במקרה זה ניתן לקצר את הקטע עד איפוס, כלומר, תחום ההגדרה של הפונקציה בבעיה זו הוא $-4<x<\infty$.

ד.



ה. $(4+x)^2 = 32$ ומתקבל $x = 1.657$ ס"מ.

ו. $(4+x)^2 = 8$ ומאן ש- $x = -1.172$ ס"מ. אורך הצלע המתקבל לאחר הקיצור הוא 2.828 ס"מ.

<u>שאלה 25</u>

נתון ריבוע שאורך אלכסוניו 8 ס"מ.

א. מה שטח הריבוע?

ב. האריכו את אחד האלכסונים של הריבוע ב- x ס"מ תוך שמירה על הזווית הישרה ביניהם. איזה מרובע התקבל? מה שטחו?

ג. בטאו בכמה גדל השטח (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של x.

ד. מה תחום ההגדרה של הפונקציה בהקשר של הבעיה הזאת?

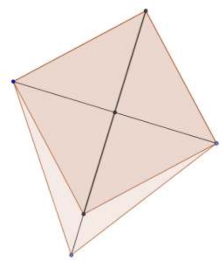
ה. שי מצא ערך של x שמכפיל (פי 2) את שטח הריבוע המקורי. בכמה הוא הגדיל את אורך האלכסון?

ו. לירן מצאה ערך של x שמקטין פי 2 את שטח הריבוע המקורי. מהו ערך זה של x?

<u>פתרונות והערות</u>

א. שטח הריבוע הוא מחצית המכפלה של אורך אלכסוניו, כלומר, 32 סמ"ר.

ב. דלתון ששטחו $\frac{1}{2} \cdot 8(8+x) = 32 + 4x$



ג. $f(x) = 4x$

ד. כיוון שניתן גם לקצר את האלכסון, יתכנו ערכים שליליים והתחום הוא $-8 < x < \infty$. נשים לב כי כאשר $x < -4$ הדלתון המתקבל הוא קעור. גם עבור דלתונים קעורים ניתן לחשב את שטחו כמחצית מכפלת האורך של האלכסונים.

ה. ניתן לפתור בעזרת משוואה. שיקול ישיר יותר: שטח דלתון הוא חצי מכפלת האלכסונים. אלכסון אחד נשאר קבוע (8 ס"מ), כך שאת האלכסון השני יש להאריך פי 2.

ו. על פי אותו שיקול האלכסון הפעם קטן ל- 4 ס"מ (במקרה זה הדלתון הפך למשולש).

שאלה 26

א. נתון ריבוע שאורך אלכסוניו 6 ס"מ. מה שטח הריבוע?

ב. האריכו את שני האלכסונים של הריבוע ב-x ס"מ תוך שמירה על הזווית הישרה בין האלכסונים. איזה מרובע קיבלתם? מה שטחו?

ג. ניצן טוען שכשהוא מאריך את אלכסוני הריבוע הוא מקבל דלתון. נועה טוענת שהיא מקבלת טרפז שווה שוקיים. גלית טוענת שהיא מקבלת ריבוע. הראו כיצד כל אחד מהם האריך את אלכסוני הריבוע תוך שמירה על הזווית הישרה ביניהם. האם תוכלו למצוא דרך נוספת להאריך את האלכסונים?

ד. הוכיחו ששטח המרובע המתקבל מהארכת אלכסוני הריבוע (תוך שמירה על הזווית הישרה ביניהם) לא תלוי באופן שבו מאריכים את האלכסונים.

ה. בטאו בכמה גדל השטח (ביחידות סמ"ר) כפונקציה של x.

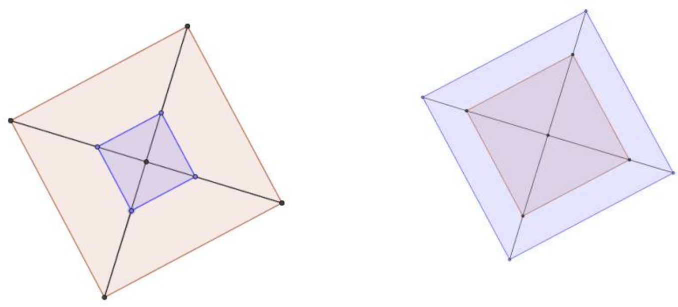
ו. בכמה אחוזים יש להגדיל את אורכי האלכסונים כך שהשטח יגדל בדיוק פי 2?

ז. בכמה אחוזים יש להקטין את אורכי האלכסונים כך שהשטח יקטן בדיוק פי 2?

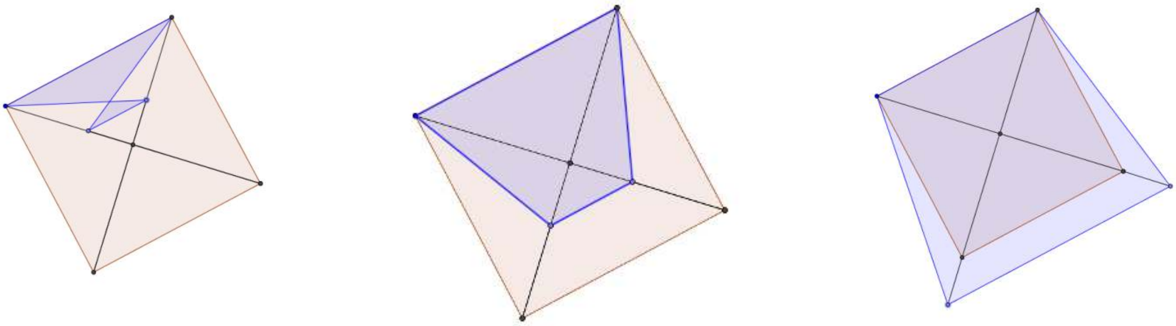
פתרונות והערות

א. שטח הריבוע חצי מכפלת אלכסוניו: 18 סמ"ר.

ב. אם מאריכים באופן סימטרי למרכז הריבוע מתקבל ריבוע, גדול או קטן מהריבוע המקורי, על פי הסימן של x.

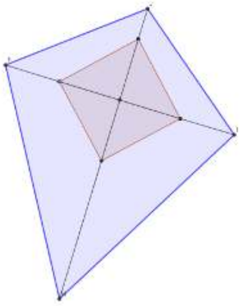


אם מקבעים צלע אחת מתקבל טרפז שווה שוקיים.

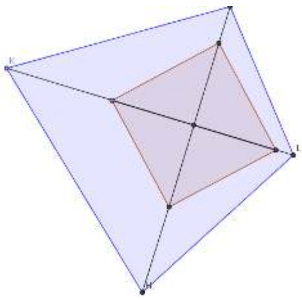


נשים לב שכאשר $x < -3$ מתקבל טרפז ששוקיו נחתכים! צורה כזאת לא תמיד נחשבת מצולע.

אם מותחים אלכסון אחד באופן סימטרי למרכז ואלכסון שני באופן לא סימטרי, מתקבל דלתון שאיננו ריבוע.



אם מאריכים באופן לחלוטין לא סימטרי לא מתקבל דלתון או טרפז, אלא מרובע כללי בעל אלכסונים שווים ומאונכים זה לזה.



ג. קל להוכיח שמרובע כזה (גם אם הוא קעור, וגם אם צלעותיו נחתכות!), השטח הוא חצי מכפלת האלכסונים.

ד. $6x+\frac{1}{2}x^2$

ה. דרך אחת לענות על שאלה זו היא לפתור משוואה ריבועית שמתארת את העובדה שהשטח גדל בדיוק כשטח הריבוע המקורי: $6x+\frac{1}{2}x^2=18$, אך יש פתרון הרבה יותר אלגנטי. ראינו בסעיף ג שניתן לקבל ריבוע, כלומר לשמור על דמיון. כדי להכפיל פי 2 שטח של ריבוע יש להגדיל את צלעו (ולכן גם את אלכסונו) פי $\sqrt{2}=1.414$, כלומר להגדיל את האלכסון ב- 41.1%.

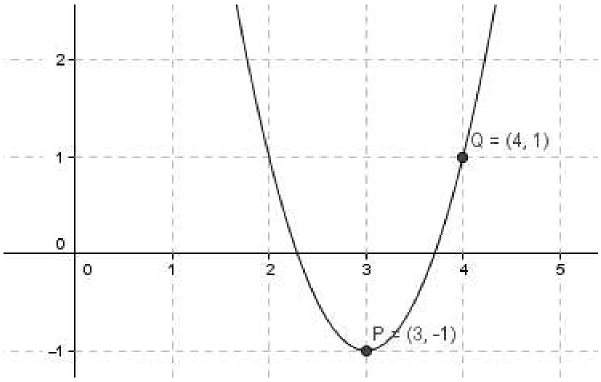
ו. דרך אחת לענות על שאלה זו היא לפתור משוואה ריבועית שמתארת את העובדה שהשטח קטן בדיוק כמחצית שטח הריבוע המקורי: $6x+\frac{1}{2}x^2=-9$, אך גם כאן יש פתרון הרבה יותר אלגנטי. ראינו בסעיף ג שניתן לקבל ריבוע, כלומר לשמור על דמיון. כדי לקבל חצי שטח יש לחלק את צלעו (ולכן גם את אלכסונו) ב $\sqrt{2}$, כלומר לכפול ב- 0.707 , כלומר להקטין את האלכסון ב- 29.3%.

<u>שאלה 27</u>

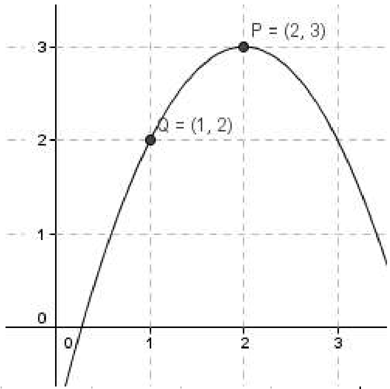
נתונים גרפים של שלוש פונקציות ריבועיות. בכל גרף מסומנים שיעורי קדקוד הפרבולה, ושיעורים של נקודה נוספת בגרף. עבור כל אחד מהגרפים, התאימו את הביטוי האלגברי מבין הבאים:

$h(x) = -(x-2)^2 + 3$,$g(x) = 0.5(x+2)^2 - 1$,$f(x) = 2(x-3)^2 - 1$

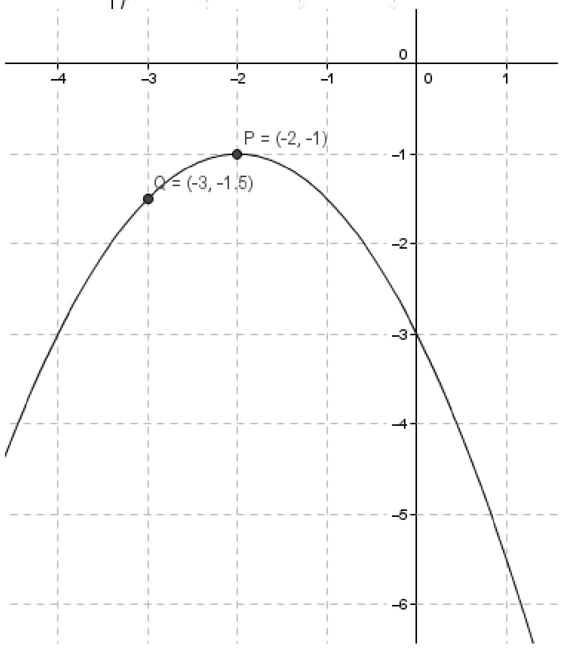
א.



ב.



ד.



שאלה 28

א. הציבו שני מספרים שונים במקום c בביטוי האלגברי $f(x) = x^2 + c$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

ב. הציבו שני מספרים שונים במקום a בביטוי האלגברי $f(x) = ax^2$ על מנת לקבל שתי פונקציות ריבועיות שונות. האם יש לגרפים של שתי הפונקציות נקודות משותפות? הסבירו.

פתרונות והערות

שאלה זו מאפשרת העלאת שיקולים אלגבריים וגרפיים על מנת להצדיק או להסביר את אותה הטענה. לפני שניגשים לפתור שאלה זו, מומלץ לדון עם התלמידים על כמה נקודות משותפות יכולות להיות לגרפים של שתי פונקציות ריבועיות שונות, ולבקש מהם להציע דוגמאות גרפיות לכל מקרה.

א. תלמידים יוכלו להעלות את הטיעון כי שינוי במקדם c, מעלה או מוריד (תלוי אם הגדלנו או הקטנו את המקדם) את כל גרף הפונקציה "במקביל" לפונקציה המקורית $f(x) = x^2$. ולכן, לא יתכן שיהיו לשני הגרפים נקודות משותפות. ניתן להצדיק זאת גם אלגברית על ידי השוואה (הרכבת משוואה) של שני הביטויים האלגבריים $x^2 + c = x^2 + d$. הפתרון היחיד למשוואה זו הוא $c = d$, שמשמעותו היא שאין נקודות משותפות אלא אם כן שתי הפונקציות זהות.

ב. מהסתכלות בביטוי האלגברי, כי הגרפים של שתי הפונקציות עוברות דרך ראשית הצירים. נשאלת השאלה האם יתכן שיש עוד נקודת חיתוך בין שני הגרפים. אך, למשוואה למשל $3x^2 = 2x^2$ יש רק פתרון אחר והוא $x = 0$, כלומר אין נקודת חיתוך אחרת.

שאלה 29

דני בחר מספר. אחר כך הוא כפל את המספר שבחר במספר שהוא גדול ממנו ב- 7. ואז אמר: התוצאה שקיבלתי היא 30. רחל אמרה: בחרת במספר 3! דני טוען שבחר במספר אחר. הייתכן? הסבירו.

פתרונות והערות

לשאלה זו מספר מטרות. תחילה היא מאפשר בדיקה של חישוב מנטאלי (בחרתי מספר 3, כפלתי אותו במספר שהוא גדול ממנו ב- 7, כלומר כפלתי ב- 10 וקיבלתי 30). אמנם הבדיקה נכונה, אך הטענה שאולי קיים מספר אחר בעל אותה תכונה. לכן יש לעודד תרגום ממילים לביטויים ולהיווכח כי אכן מדובר במשוואה ריבועית אשר לה שני פתרונות, 3 הוא אחד מהם והשני הוא 10-. ניתן לחולל מספר שאלות מסוג זה ולתת אותם לתלמידים. בכיתה מתקדמת יותר אפשר לבקש מהתלמידים שימציאו שאלות דומות, כולל מצבים בהם לא יתכן שיהיה פתרון שני.

שאלה 30

א. נתונה המשוואה הריבועית $x^2+bx+9=0$. מצאו שני ערכים של b, כך שלמשוואה יהיה פתרון יחיד, ושני ערכים עבורם אין למשוואה פתרון.

ב. בנו משוואה ריבועית כלשהי כך ששני פתרונותיה יהיו שליליים.

ג. בנו שתי משוואות ריבועיות שונות, כך שלשתיהן יהיו אותם שני פתרונות.

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לטפח שיטות עבודה שונות ולאפשר לתלמידים למצוא תשובות שונות שהן כולן נכונות עבור המשימה שניתנה.

א. דרך אפשרית לפתרון היא להציב מספרים שונים במקום b ולחשב בעזרת הנוסחה את הפתרונות. דרך שיטתית יותר היא לבחון את הנוסחה ולהיווכח כי הדיסקרימיננטה במקרה זה היא תמיד $\sqrt{b^2-36}$, ולכן עבור כל מספר גדול מ- 6 אשר נציב במקום b יתקבלו שני פתרונות שונים למשוואה. אם נציב $b=6$, נקבל פתרון יחיד. רצוי לדון בכך עם התלמידים כדי שיתרגלו להסתכל על נוסחה ולנתח אותה.

ב. גם בסעיף זה התלמידים יוכלו לעשות ניסוי וטעיה. כמו כן, יוכלו להשתמש בביטוי $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ כדי להרכיב משוואה ריבועית כמבוקש.

ג. בנוסחה $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, שינוי הערכים של a בלבד יובילו למשוואות שונות בעלות אותם שורשים. בכיתות מתקדמות אפשר לקשור עובדה זו לגרפים של פונקציות ריבועיות שונות בעלות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

[חזרה לתוכן העניינים](#)

אלגברה – טכניקה בהקשר

<u>שאלה 1</u>

ידוע כי אורך אלכסון של מלבן נתון הוא 13 ס"מ ושטחו 60 סמ"ר.

א. מצאו את היקף המלבן.

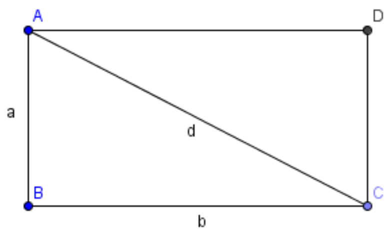
ב. מצאו את אורכי צלעות המלבן הנתון.

ג. דני טוען כי הוא יכול לחשב את ההיקף על פי נוסחה $P = 2\sqrt{d^2 + 2A}$, כאשר P הוא ההיקף, d הוא אורך האלכסון ו- A הוא השטח. בדקו שאכן לפי נוסחתו מתקבל ההיקף שמצאתם בסעיף הקודם.

ד. יוסי טוען כי על פי הנוסחה של דני ,עבור מלבנים בעלי אותו היקף ,ככל שהשטח גדל אורך האלכסון קטן .תנו דוגמאות והסבירו האם הטענה נכונה.

ה. אתגר: הסבירו מדוע הנוסחה של דני נכונה.

<u>פתרונות והערות</u>



א. להלן שתי דרכים אפשריות למציאת היקף המלבן:
הראשונה מוצאת תחילה את אורכי הצלעות של המלבן ומתבססת על פתרון מערכת משוואות לא לינאריות, ואילו השנייה מתבססת על נוסחאות הכפל המקוצר.

- <u>דרך ראשונה</u>: כיוון שנתונים האלכסון והשטח, ניתן לכתוב נכתוב שתי משוואות עם שני נעלמים a ו- b (אורכי צלעות המלבן), כך: $a^2 + b^2 = 13^2 = 169$ ו- $ab = 60$. נציב במשוואה הראשונה $b = \frac{60}{a}$ ונקבל $a^2 + (\frac{60}{a})^2 = 169$. על ידי פישוט, מתקבלת המשוואה דו-ריבועית, $(a^2)^2 - 169(a^2) + 60^2 = 0$ שפתרונן הם: $a^2 = 25$ או $a^2 = 144$. ומכאן נקבעים אורכי הצלעות של המלבן היחיד הקיים: 5 ו- 12 ס"מ, וההיקף המלבן הוא 34 ס"מ.
- <u>דרך שניה</u>: נקודת המוצא הן אותן שתי המשוואות הנתונות $a^2 + b^2 = 13^2 = 169$ ו- $ab = 60$. ניתן לקשור ביניהן על ידי הנוסחה $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, ולכן $(a+b)^2 = 13^2 + 2 \times 60$. כלומר, $(a+b)^2 = 289$, ולכן $a + b = 17$, ומכאן שההיקף הוא 34. מעניין להיווכח כי, בדרך זו, מוצאים את ההיקף מבלי לדעת את אורכי הצלעות.

ב. אם פותרים סעיף א לעיל בדרך הראשונה, אורכי הצלעות כבר נמצאו. אם פותרים בדרך השנייה, כותבים משוואה ריבועית, למשל, $a(17-a)=60$. למשוואה זו שני הפתרונות 5 ו- 12 אשר קובעים מלבן יחיד.

ג. $P=2\sqrt{13^2+2\times 60}=2\sqrt{289}=34$

ד. כאשר ההיקף קבוע, הוא קובע את הסכום של ריבוע האלכסון ושל פעמיים השטח. לכן (פעמיים) השטח הוא מקסימאלי כאשר (ריבוע) האלכסון מינימאלי. ניתן לראות זאת גם מהנוסחה $P=2\sqrt{d^2+2A}$, גידול ב- A מחייב הקטנת d כדי לשמור על אותו ערך של P. בכיתות מתקדמות ניתן להוכיח כי מתקבל שטח מקסימאלי כאשר המלבן הוא ריבוע. הוכחה: נקודת המוצא היא $(a-b)^2\geq 0$, כלומר, $a^2+b^2\geq 2ab$, אך, בהקשר של הבעיה ניתן לכתוב אי-שוויון זה כ- $d^2\geq 2A$. כלומר, האלכסון הקטן ביותר מתקבל כאשר $d^2=2A$, כלומר כשהמלבן הוא ריבוע. הריבוע מתאפיין בכך שאורכי שתי צלעותיו הם שורש השטח, ולכן ממשפט פיתגורס $d^2=2A$.

ה. הנוסחה היא הכללה של הדרך השנייה המפורטת בתשובה שלסעיף א לעיל.

שאלה 2

אריאל בודק זוגות מספרים שסכומם 100 ומחשב את מכפלתם.

א. מצאו שלושה זוגות מספרים כאלה ורשמו את מכפלותיהם.

ב. סמנו ב- x את אחד המספרים וכתבו פונקציה המתארת את מכפלת שני המספרים.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה ומצאו את שיעורי קדקוד הפרבולה. הסבירו מה משמעותו בהקשר של הבעיה.

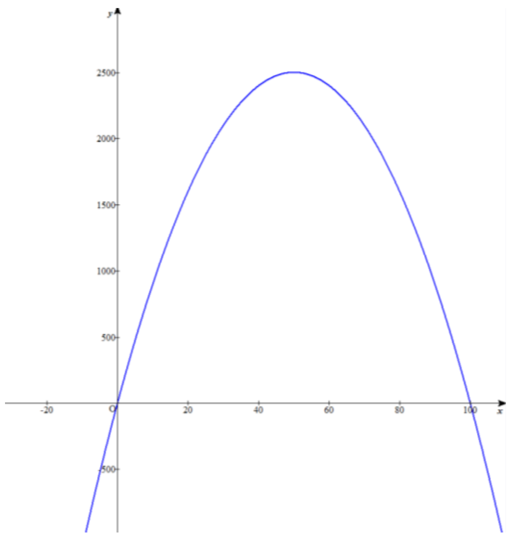
ד. מצאו את שני המספרים אם ידוע כי המכפלה היא 2499.

פתרונות והערות

א. 91 ו- 9, מכפלתם 819; 20.5 ו- 79.5, מכפלתם 1629.75; $\sqrt{7}$ ו- $100-\sqrt{7}$, מכפלתם $100\sqrt{7}-7$ (≈ 261.92)

ב. $f(x)=x(100-x)$

ג.



שיעורי הקדקוד הם (50,50) והיא המכפלה הגדולה ביותר של שני מספרים אשר סכומם 100.

ד. $2499=2500-1=\ 50^2-1^2=(50-1)(50+1)=49\times 51$

שאלה 3[5]

ערן חושב שהוא גילה "חוק חילוף" חדש: במכפלה של שני מספרים דו-ספרתיים, הוא מצא דוגמא בה החלפת מקומן של האחדות והעשרות שומר על התוצאה. למשל:

$$42 \times 36 = 24 \times 63$$

א. בדקו את החישוב של ערן.

ב. הפעילו ובדקו את נכונות החוק של ערן גם על המכפלה $96 \times 46 = 69 \times 64$

ג. האם "חוק החילוף" החדש נכון תמיד? הסבירו.

ד. מצאו דוגמאות נוספות שמקיימות את החוק.

ה. הציעו דרך למצוא את כל הדוגמאות האפשריות.

פתרונות והערות

ג. הוא אינו נכון תמיד, כי, למשל, $91 \times 81 \neq 19 \times 18$.

ד. על מנת למצוא דוגמאות נוספות, יש לחקור מתי התופעה נכונה וזאת עושים בעזרת אלגברה:

$$(10a+b)(10c+d) = (10b+a)(10d+c) \quad \Rightarrow$$

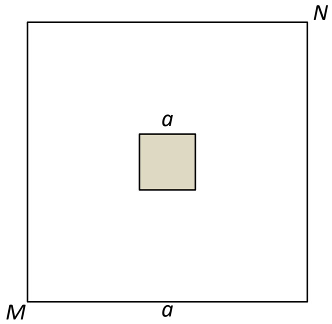
$$\Rightarrow \qquad 100ac + 10bc + 10ad + bd = 100bd + 10ad + 10bc + ac \ \Rightarrow$$

$$99ac = 99bd \ \ \Rightarrow \ ac = bd$$

[5] בהשראת המאמר: "כפול, הפוך וכפול" מאת ר. אבן ומ. ברוקהיימר, שבבים תיק מס'14. את המאמר השלם ניתן למצוא ב: http://stwww.weizmann.ac.il/menu/Disciplines/math_paper/14/14_2.pdf

<u>שאלה 4</u>

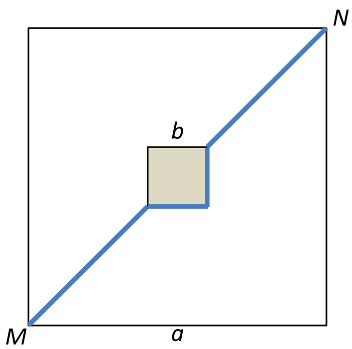
נתונה כיכר ריבועית שאורך צלעה הוא a. במרכזה יש ערוגה ריבועית שאורך צלעה הוא b, ואשר עליה אסור לדרוך (ניתן להלך על הצלעות שלה).



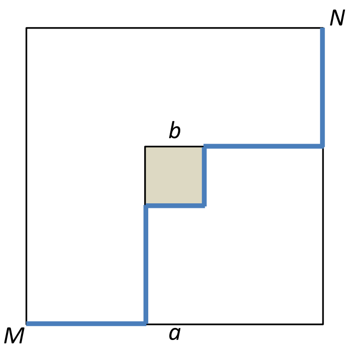
נועם, עדי וגיל הלכו מהפינה M לפינה N בשלושה מסלולים שונים (מבלי לדרוך על הערוגה האמצעית). כל אחד מהביטויים האלגבריים הבאים מבטא בהתאמה את המרחק שהלכו הילדים:

$2a$, $\sqrt{2}(a-b)+2b$, $2\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2}$

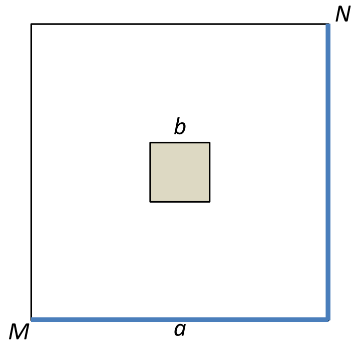
א. להלן סקיצות של מסלולים האפשריים. התאימו כל אחת מהסקיצות לביטוי האלגברי שמתאר את אורך המסלול (הערה: יתכן ביטוי אלגברי שמתאים ליותר מסקיצה אחת).



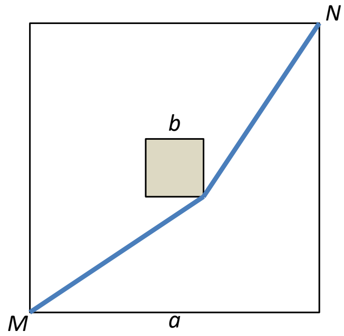
מסלול 1



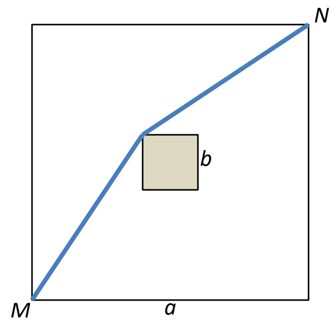
מסלול 2



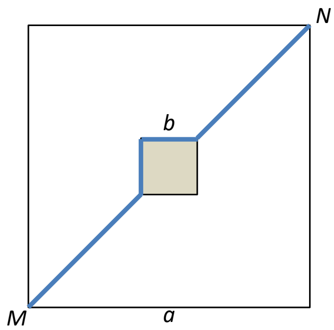
מסלול 3



מסלול 4



מסלול 5



מסלול 6

ב. סדרו את הביטויים מקטן לגדול (היעזרו בסקיצות). הסבירו.

ג. אם היה מותר לדרוך על הערוגה, מה היה אורך המסלול הקצר ביותר מפינה לפינה?

ד. הציעו מסלולים נוספים וחשבו את אורכם.

__פתרונות והערות__

א. הביטוי $2a$ מתאים למסלולים 2 ו- 3, הביטוי $\sqrt{2}(a-b)+2b$ מתאים למסלולים 1 ו- 6, והביטוי $2\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2}$ מתאים למסלולים 4 ו- 5.

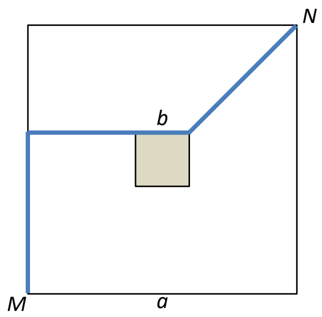
ב. השוואת הביטויים האלגבריים יכולה להיות משימה טכנית ארוכה ולא קלה. אך ניתן להשוות בין הביטויים האלה על ידי התנסות עם מספרים ובאופן כללי יותר על פי אורך המסלול שהם מייצגים.

מהשרטוטים רואים כי המסלול המיוצג על ידי הביטוי $2\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2}$ הוא הקצר ביותר, ואילו הביטוי המיוצג על ידי $2a$ הוא הארוך ביותר. ולכן:

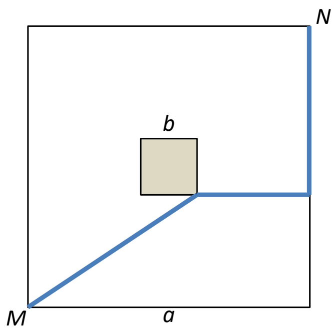
$$\sqrt{2}\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2} \quad < \quad \sqrt{2}(a-b)+2b \quad < 2a$$

ג. $\sqrt{2}a$ (אורך האלכסון של הריבוע שצלעו a

ד. לדוגמא, $\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)+a+b$ מבטא את אורך המסלול הבא:



והביטוי $\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2}+\left(\frac{a-b}{2}\right)+(\frac{a+b}{2})$ מבטא את אורך המסלול הבא:



שאלה 5

תוך כדי משחקי חשבון, רני שם לב כי $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}$ (בדקו את החישוב!) ותהה האם יש עוד זוגות שברים כאלה (בהם המונה הוא אחד) אשר מקיימים שתוצאת החילוק ביניהם שווה לתוצאת החיבור ביניהם.

א. אריאל אמר כי המכנה של השבר השני (המחלק) לא יכול להיות 1. האם הוא צודק? הסבירו.

ב. מצאו את המכנה של השבר השני אם המכנה של השבר הראשון הוא 12.

ג. מצאו בעזרת אלגברה את כל המקרים האפשריים בהם מתקיימת תכונה זו.

ד. דני תהה האם התכונה מתקיימת גם עבור מספרים שלמים. הוא חיפש ומצא כי, למשל : $(-4)\div 2 = 2+(-4)$. מצאו בעזרת אלגברה את כל המקרים האפשריים.

פתרונות והערות

א. אם המכנה של השבר השני הוא 1, אזי כל השבר שווה 1. לחלק ב-1 אינו משנה את המחולק, ואילו תוספת של אחד תמיד מגדילה אותו, ולכן אף פעם לא יכול להתקיים שוויון.

ב. מתקבלת המשוואה הריבועית $\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}\div\frac{1}{12}$ אשר לה שני פתרונות 4 או (-3). ואכן $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\div\frac{1}{12}$ וגם $\frac{1}{(-3)}+\frac{1}{12}=\frac{1}{(-3)}\div\frac{1}{12}$.

ג. מתקבלת המשוואה $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\div\frac{1}{x}$, ובעזרתה אפשר למצוא את כל הזוגות של המספרים שמקיים אותה: אם נבחר ערך כלשהו ל- $y\neq 1$, הערכים המתאימים של x יהיו $x=y^2-y$.

ד. במקרה זה המשוואה היא: $a\div b=a+b$ וממנה נגזר כי אם נבחר ערך כלשהו עבור b כך ש- $b\neq 1$, אם $a=\frac{b^2}{1-b}$, הזוגות יקיימו את התנאי. יש לשים לב כי תנאי זה כולל את כל המקרים שכבר נחקרו בסעיף ג, והמקרה היחיד עבור מספרים שלמים הוא אכן $(-4)\div 2=(-4)+2$.

שאלה 6

a, b, c, d הם ארבעה מספרים טבעיים עוקבים כלשהם. הוכיחו כי:

א. $bc - ad = 2$

ב. $bd - ac$ הוא תמיד מספר אי-זוגי.

ג. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ הוא תמיד מספר זוגי אך לא יכול להיות כפולה של 4.

פתרונות והערות

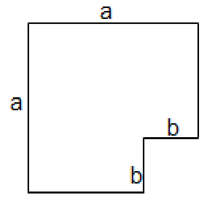
א. אם $a = n$, ניתן לכתוב את הביטוי כך ולהיווכח כי אכן $(n+1)(n+2) - n(n+3) = 2$.
ניתן גם לייצג את $a = n - 1$, ולהיווכח כי $(n)(n+1) - (n-1)(n+2) = 2$.

ב. אם $a = n$, $(n+1)(n+3) - n(n+2) = n^2 + 4n + 3 - n^2 - 2n = 4n + 3$.

ג. בעזרת סעיף זה ניתן לדון עם התלמידים על זיהוי ביטויים אלגבריים שמייצגים מספרים טבעיים שהם זוגיים, או כפולות של 4. לאחר הצבת ביטויים של מספרים עוקבים, העלאתם בריבוע וכינוס איברים מקבלים $4n^2 + 12n + 14$. ביטוי זה ניתן לכתוב $2 \times (2n^2 + 6n + 7)$, וניתן לראות כי הביטוי תמיד מייצג מספר זוגי. אך אין אפשרות לבטא $4n^2 + 12n + 14$ כמכפלה של שני גורמים בה אחד מהם הוא 4.

שאלה 7

שטחו של המשושה שלפניכם הוא 32 סמ"ר. חמש מזוויותיו הן בעלות $90°$, והזווית הששית היא בעלת $270°$.



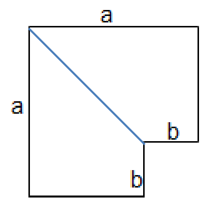
א. איזה מבין הערכים הבאים יכול להיות הערך של a: 5.5, $\sqrt{32}$, 7. נמקו.

ב. רשמו ביטוי אלגברי להיקף המשושה.

ג. מה יכולים להיות הערכים של a, ו- b אם ידוע שהם מספרים טבעיים?

ד. מצאו את הערכים של a, ו- b אם ידוע כי השטח של המשושה הוא מחצית שטחו של הריבוע שצלעו a.

ה. רשמו ביטוי אלגברי לאורך של האלכסון המסומן.



פתרונות והערות

א. את שטח המשושה (הקעור) הנתון ניתן לחשב כהפרש של שני ריבועים, והביטוי המתקבל הוא $a^2 - b^2 = 32$. מכאן שאם $a = \sqrt{32}$, אז $b = 0$ ולא יהיה קיים משושה. כמו כן, בביטוי לשטח אין אפשרות ש- $a = 5.5$, שאכן ריבועו קטן מ- 32.

ב. ניתן לחשב את ההיקף של המשושה על ידי חיבור אורכי שש הצלעות שלו באופן הבא: $a + a + a - b + b + b + b + a - b$. סכום זה הוא $4a$, שהוא זהה להיקף הריבוע שצלעו a. אך זה לא מפתיע כי הקטע ש"חסר" בהיקף הריבוע הגדול הוא בדיוק הקטע שמתווסף כצלע של הריבוע הקטן.

ג. כיון ש- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 32$, יש לחפש מה הם זוגות הגורמים האפשריים של 32: 1 ו- 32, 2 ו- 16 ו- 4 ו- 8. על ידי פתרון שלוש מערכות משוואות, מתקבלים שני זוגות של מספרים אפשריים: $a = 9,\ b = 7$; ו- $a = 6,\ b = 2$.

ד. $a = 8,\ b = 4\sqrt{2} \cong 5.65$

ה. $\sqrt{2}(a-b)$

שאלה 8

בסעיפים הבאים ניתן לחשב ערך של ביטויים מורכבים משני משתנים מבלי לדעת את ערכם של כל משתנה בנפרד.

א. חשבו את הערך של הביטוי $\frac{a^4}{b^4}$ אם ידוע כי: $\frac{a+13b}{3a-b}=3$ $(a\neq\frac{b}{3}, b\neq 0)$

ב. חשבו את הערך של $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$ אם ידוע כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2.9$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

ג. חשבו את הערך של הביטוי a^2-b^2 אם ידוע כי:

$$\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{3}{b-a}=a+b \quad (a\neq b)$$

פתרונות והערות

בתרגילים אלה, ניתן לחשב ערך של ביטוי אלגברי עם שני משתנים על בסיס ערך של ביטוי אחר ומבלי לדעת את הערך של המשתנים המעורבים.

א. $\frac{a+13b}{3a-b}=3 \Rightarrow a+13b=9a-3b \Rightarrow 8a=16b \Rightarrow \frac{a}{b}=2 \Rightarrow \frac{a^4}{b^4}=16$

ב. $8.41=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2 \qquad \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=8.41-2=6.41$

במקרה זה ניתן לפתור בדרך אחרת: רואים כי $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{b}{a}$ הם מספרים הופכיים, ולכן ניתן לייצג אותם כ- x ו- $\frac{1}{x}$ כאשר $x=\frac{a}{b}$. פתרון המשוואה הריבועית $x+\frac{1}{x}=2.9$ נותן $x=2.5$ (במקרה זה $\frac{1}{x}=0.4$) או $x=0.4$ (במקרה זה $\frac{1}{x}=2.5$). לכן לצורך התרגיל שלנו, הפתרון הוא יחיד כי בשני המקרים התוצאה של $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$ היא זהה ושווה ל- $2.5^2+0.4^2=6.41$

ג. $\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{3}{b-a}=\frac{a-b+3(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{4}{a-b} \Rightarrow \frac{4}{a-b}=a+b \Rightarrow a^2-b^2=4$,

שאלה 9[6]

א. ליונתן יש שיטה לחשב 45^2:

$45^2 = ?$	
$5^2 = 25$ (ריבוע של ספרת האחדות)	$4 \times 5 = 20$ (מכפלת הספרות)
$45^2 = 2025$ (צירוף של התוצאות לעיל)	

בדקו עבור אלו מספרים דו-ספרתיים השיטה של יונתן עובדת? הסבירו.

ב. דלית הכניסה שינוי לשיטה של יונתן והסבירה את השיטה שלה בעזרת הדוגמה הבאה:

$35^2 = ?$	
$5^2 = 25$ (ריבוע של ספרת האחדות)	$3 \times 4 = 12$ (מכפלת ספרת העשרות במספר העוקב לה)
$35^2 = 1225$ (צירוף של התוצאות לעיל)	

בדקו עבור אילו מספרים דו-ספרתיים השיטה של דלית עובדת? הסבירו.

[6] בהשראת שיחה בין המורה למתמטיקה אחמד פרחאת לג'סון קופר.

ג. דודתה המתמטיקאית של דלית הציעה לה לבחון את השיטה הבאה בא שני הגורמים הם דו-ספרתיים ובעלי אותה ספרת העשרות:

52×58	
$5 \times (5+1) = 30$ (מכפלת ספרת העשרות במספר העוקב לה)	$2 \times 8 = 16$ (מכפלה של ספרות האחדות)
$52 \times 58 = 3016$ (צירוף של התוצאות לעיל)	

בדקו עבור אילו מספרים דו-ספרתיים השיטה של דלית עובדת? הסבירו.

ד. דודתה הציעה לה שיטה קלה נוספת לחישוב מכפלות כמו למשל 12×17:

1.	מחברים אותו עם ספרת האחדות של המספר השני	$2 + 17 = 19$ או $2 + 17 = 19$
2.	מוסיפים לתוצאה 0 מימין	190
3.	מחברים את התוצאה למכפלת ספרות האחדות	$190 + 2 \times 7 = 204$

בדקו עבור אילו מספרים דו-ספרתיים השיטה של דלית עובדת? הסבירו.

<u>שאלה 10</u>

טענה: "סכום ההופכיים של שני מספרים (שונים מאפס) שווה להופכי של סכומם". האם הטענה נכונה תמיד, נכונה במקרים מסוימים, או אף פעם לא נכונה? נסו תחילה מספר דוגמאות מספריות, שערו השערה ונסו לפתור בעזרת אלגברה.

<u>פתרונות והערות</u>

כדאי לנסות את הטענה על זוגות של מספרים בעלי אותו סימן או סימן הפוך. הקושי למצוא דוגמה שמאשרת את הטענה משמשת שתי מטרות: לתת תחושה מדוע השוויון אינו מתקיים (כולל תחושה איזה צד בשוויון גדול יותר) ומשמש זרז למצוא הוכחה לכך שהטענה לא נכונה אף פעם.

פתרון אפשרי: הייצוג האלגברי של הטענה הוא: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$. מכאן כבר ניתן לראות כי המגבלות $a \neq 0$ ו $b \neq 0$ הן לא היחידות, בנוסף יש לציין כי $a \neq -b$, כלומר שהמספרים לא יכולים להיות נגדיים. מעבר למכנה משותף, מוביל ל-: $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, כלומר $(a+b)^2=ab$.

אבל, שוויון זה יכול להתקיים אך ורק אם $ab>0$. במקרה זה, תמיד מתקיימת שרשרת האי-שוויונות הבאה: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>2ab>ab$, ולכן לא קיים זוג מספרים שמקיים את הטענה.

שאלה 11

פתרו את המשוואות הבאות רק על ידי שיקולים וללא ביצוע חישובים אלגבריים.

א. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=1.1$

ב. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=0$

ג. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=-1$

ד. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=x^2-11$

ה. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=x^2+11$

פתרונות והערות

שאלה זו נועדה להרגיל תלמידים להסתכל תחילה על המשוואות, לנסות להבין את התנאי שהן מציבות ולנסות לפתור אותן על פי שיקולים כאשר הדבר ניתן.

א. אין פתרונות. המונה תמיד קטן מהמכנה, ולכן המנה תמיד קטנה מ- 1.1.

ב. מנה שווה לאפס כאשר המונה שלה שווה לאפס, כלומר $x=\pm\sqrt{11}$.

ג. כדי ששבר יהיה שווה ל- -1, המונה והמכנה שלו צריכים להיות מספרים נגדיים. במקרה זה, המרחק בין המונה והמכנה הוא 22, וזוג הנגדיים היחיד שהם במרחק 22 הם 11 ו- -11 כלומר כאשר $x=0$.
זאת ניתן היה גם לראות מהסתכלות בשבר.

ד. כדי שיהיה פתרון, המכנה של השבר צריך להיות 1, אך הוא אף פעם לא קטן מ- 11.

ה. אין פתרון. כדי להיווכח בזה נשווה את שני האגפים אחרי שנכפול במכנה.
$$x^2-11=(x^2+11)^2$$
אגף שמאל קטן מ- x^2, ואגף ימין תמיד גדול מ- x^2, כי: $x^2<x^2+11<(x^2+11)^2$. אי-השוויון האחרון מוצדק שכן העלה של מספר בריבוע "מגדילה" אותו, כל עוד המספר גדול מ- 1, וכאן המספר שמועלה בריבוע הוא לכל הפחות 11.

<u>שאלה 12</u>

הוכיחו כי:

א. סכום שלושה מספרים טבעיים עוקבים הוא כפולה של 3.

ב. מכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים הוא כפולה של 3.

ג. סכום של אחד עשר מספרים טבעיים עוקבים הוא כפולה של 11.

ד. 302 וגם 30002 הם סכום של ריבועים של שלושה מספרים עוקבים, אך 3002 אינו כזה. בשני המקרים הראשונים מצאו את הסכומים.

ירושלים * רח' דבורה הנביאה 2 * בניין לב רם * מיקוד 91911 * טל': 02-5603514 * פקס: 02-5603580
כתובת אתר ממשלה זמין: http://www.gov.il **כתובת אתר המשרד**: http://www.education.gov.il

שאלה 13 (למצטיינים)

האם הנכם מכירים מספרים ראשוניים גדולים מ- 19? ובכן להלן הוכחה שאין כאלה.

מצאו את הטעות בהוכחה.

משפט: לא קיימים מספרים ראשוניים גדולים מ- 19

הוכחה: ניקח מספר n כלשהו, כך ש $n > 19$

אם n זוגי, אזי הוא לא ראשוני.

אם n אי-זוגי, אזי המספרים $\frac{n+1}{2}$ ו- $\frac{n-1}{2}$ הם מספרים טבעיים, ולכן מתקיים השוויון הבא

$$n = (\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2$$

וזה ביטוי מהצורה $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

כלומר ביטאנו את n כמכפלה של שני גורמים ולכן הוא איננו ראשוני.

פתרונות והערות

שאלה זו מחייבת את התלמידים לקרוא טקסט מתמטי קצר ולבחון את נכונותו. במקרה זה, הטקסט עושה שימוש בתכונות אלגבריות פשוטות, אשר קל לעקוב אחריהן. הרבה תלמידים יחפשו תחילה שגיאת "חישוב" אך במהלך הטיעון לעיל אין כאלה. "הוכחה" זאת אכן מציגה כל מספר אי-זוגי (ולא רק הגדולים מ- 19) כמכפלה של שני מספרים שלמים, אך אחד משני המספרים האלה הוא $\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = n$ והשני הוא $\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} = 1$, כלומר, המספר מוצג כמכפלה של 1 במספר עצמו, דבר שלא עומד בסתירה להיותו מספר ראשוני.

<u>שאלה 14</u>

כדי לקבל ממוצע חשבוני של שני מספרים חיוביים כלשהם מחברים אותם ומחלקים את התוצאה בשתיים.
כדי לקבל ממוצע גיאומטרי בין שני מספרים חיוביים כלשהם מחשבים את השורש הריבועי של מכפלתם.

א. חשבו את הממוצע החשבוני והממוצע הגיאומטרי של זוגות המספרים הבאים: 9 ו-4; 18 ו-2; 25 ו-5.

ב. מצאו שלושה זוגות מספרים כך שהממוצע החשבוני של כל זוג הוא 12.

ג. מצאו שלושה זוגות מספרים כך שהממוצע הגיאומטרי שלהם הוא 12.

ד. נתון מלבן שצלעותיו 32 ס"מ ו-8 ס"מ. מה אורך צלע הריבוע ששטחו שווה לשטח המלבן הנתון? מה הקשר של שאלה זו לשאלות הקודמות?

ה. נתון מלבן שצלעותיו 6 ס"מ ו-8 ס"מ. האם שטח הריבוע שצלעו הוא הממוצע החשבוני של צלעות המלבן הנתון גדול, קטן או שווה לשטח של המלבן? הסבירו.

ו. הוכיחו כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים שונים הוא תמיד גדול מהממוצע הגיאומטרי שלהם.

שאלה 15

א. מצאו את ריבוע הממוצע החשבוני ואת הממוצע החשבוני של הריבועים של הזוגות הבאים: 4 ו-8; 10 ו-20; 31 ו-33. באלו מקרים ריבוע הממוצע קטן מממוצע הריבועים?

ב. הראו כי עבור שני מספרים חיוביים שונים a ו- b הממוצע החשבוני של הריבועים שלהם הוא תמיד גדול יותר מהריבוע של הממוצע החשבוני שלהם.

ג. חשבו בכמה גדול יותר ממוצע הריבועים של שני מספרים חיוביים כלשהם מריבוע הממוצע שלהם.

ד. האם המסקנה שהסקתם בסעיף ב לעיל תקפה גם לממוצע הגיאומטרי בין שני מספרים חיוביים כלשהם? הסבירו.

שאלה 16

א. בחרו מספר חד-ספרתי כלשהו. הכפילו אותו ב- 16, את התוצאה הכפילו ב- 7. לבסוף החסירו את המספר שבחרתם. איזה מספר קיבלתם?

ב. חזרו על התהליך של הסעיף הקודם ונסו להסביר מדוע מתקבל תמיד סוג מסוים של מספרים ולא אחרים.

ג. בחרו שני מספרים אי-זוגיים עוקבים כלשהם (לדוגמא 7 ו- 9). חשבו את מכפלתם ולתוצאה הוסיפו 1. הסבירו מדוע תמיד יתקבל מספר ריבועי.

ד. בחרו שבר פשוט כלשהו (חיובי וקטן מ-1). הסבירו מדוע כאשר מוסיפים את אותו מספר חיובי למונה ולמכנה של השבר שנבחר, השבר שנבחר גדל.

פתרונות והערות

מטלה זו מיועדת לתרגל את התרגום של תופעות אריתמטיות לאלגברה ולבדוק את כלליותן (להוכיח). לצורך זה, תלמידים מתבססים על טכניקה אלגברית בהקשר ולמטרה מסוימת ולא רק כתרגול בפני עצמו. בהתאם לרמת הכתה ולשיקול דעתו של המורה, תמיד ניתן להתחיל בבחינת כמה דוגמאות מספריות על מנת לחוש את התופעה ואת הצורך לבדיקה הכללית.

ב. $n \times 16 \times 7 - n = 111n$ המספר הוא תמיד תלת ספרתי בו כל הספרות זהות.

ג. שני מספרים אי-זוגיים עוקבים ניתן לייצג למשל כך: $2n-1$ ו- $2n+1$, כאשר n הוא מספר טבעי. רצוי לדון עם התלמידים מדוע ייצוג זה אכן הולם, ולהציע (או לבקש מהם ייצוגים אחרים (למשל, $2n+1$ ו- $2n+3$, כאשר n הוא מספר טבעי או אפס). במקרה הראשון ולאחר ביצוע ההוראות מתקבל $4n^2$, ובמקרה השני $4n^2+8n+4$. על התלמידים לזהות ששני הביטויים מציינים מספרים ריבועיים ולכן התוצאה אינה תלויה בייצוג שנבחר.

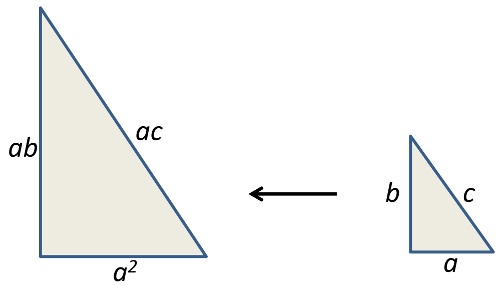
ד. אם בחרנו $\frac{a}{b}$ $(a<b\ ,a,b>0)$ צריך להוכיח כי אם $m>0$ $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$. ידוע כי $a<b \Leftarrow am<bm$
$\Leftarrow am+ab<bm+ab \Leftarrow \frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

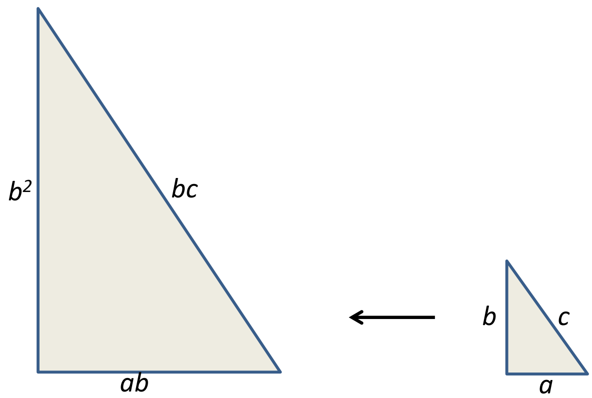
<u>שאלה 17</u>

א. הראו כי מתקיים משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית בו הניצבים הם באורכים 8 ו- 15 ס"מ והיתר הוא באורך 17 ס"מ.

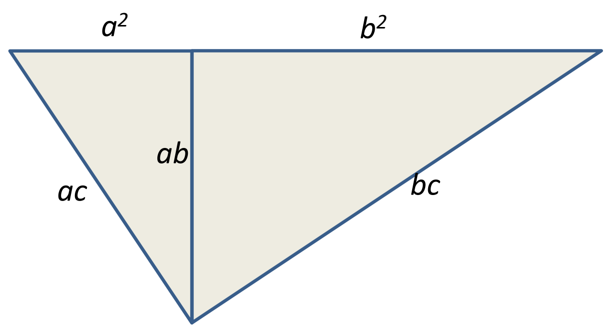
ב. הראו כי מתקיים משפט פיתגורס גם כאשר מגדילים את אורכי כל צלעות פי שניים.

ג. בשרטוטים הבאים, המשולש ישר הזווית (ניצבים a, b ויתר c) הוגדל. בשני המקרים ציינו את גורם ההגדלה והראו כי משפט פיתגורס ממשיך להתקיים לאחר כל הגדלה.





ד. הסבירו כיצד הורכב השרטוט הבא והראו כי גם בו מתקיים משפט פיתגורס.



שאלה 18

להלן טבלת מאה המספרים הטבעיים הראשונים:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	16	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

א. בחרו מתוך הטבלה שלושה "ריבועים" <u>כלשהם</u> (של שניים על שניים), לדוגמה:

88	89		41	42		3	4
98	99		51	52		13	14

בכל ריבוע הכפילו את שני זוגות המספרים הנמצאים בקצות האלכסון (לדוגמא: 99×88 ו- 89×98).
מצאו את ההפרש החיובי בין שתי המכפלות בכל שלושת הריבועים שבחרתם. מה מצאתם? הסבירו.

ב. בחרו מתוך הטבלה שני "ריבועים" <u>כלשהם</u> (של שלושה על שלושה), לדוגמה:

8	9	**10**		**3**	4	**5**
18	19	20		13	14	15
28	29	**30**		**23**	24	**25**

בכל ריבוע הכפילו את שני זוגות המספרים הנמצאים בקצות האלכסון (לדוגמא: 3×25 ו- 5×23 או 8×30 ו- 10×28). מצאו את ההפרש בין שתי המכפלות בשני הריבועים שבחרתם. מה מצאתם? הסבירו.

<u>פתרונות והערות</u>

מטלה זו מיועדת ללמד "לפקוח עיניים" לגילוי דפוסים וחוקיויות, לבטא אותן בעזרת אלגברה, להסיק מסקנות ולהבין את המנגנון הכללי שמאחוריהן. במקרה הראשון: יש להראות ש: $(a+1)(a+10)-a(a+11)=10$ ללא קשר לערך של a.

במקרה השני: $(a+2)(a+20)-a(a+22)=40$.

ניתן להמשיך ולבדוק את החוקיות בריבועים של $n\times n$, $n\le 10$. במקרה זה ולפי שיקול דעתו של המורה ניתן לערוך טבלה של כל המקרים ולחקור את החוקיות של ההפרשים המתקבלים.

<u>שאלה 19</u>

אורכי צלעותיו של מלבן נתון הם 40 ס"מ ו- 30 ס"מ.

א. חשבו את ההיקף ואת שטח המלבן.

ב. מה ההיקף ומה השטח של המלבן לאחר שהגדילו את שתי צלעותיו ב- 20%?

ג. בכמה אחוזים גדל ההיקף ובכמה אחוזים גדל השטח לאחר הגדלת הצלעות ב- 20%?

ד. חשבו את אורך האלכסון של המלבן המקורי (30×40) ואת אורך האלכסון של המלבן אשר אורכי הצלעות הוגדלו ב- 20%. בכמה אחוזים גדל אורך האלכסון?

ה. ענה על הסעיפים א-ד אם אורכי הצלעות של המלבן המקורי הם a ו- b ס"מ.

ו. כיצד יש לשנות את אורכי הצלעות של המלבן המקורי (30×40) כדי ששטחו יגדל ב- 20%?

ז. כיצד משתנה השטח של המלבן המקורי (30×40) אם מגדילים אחת הצלעות ב- 10% ומקטינים את הצלע השנייה ב- 10%?

<u>פתרונות והערות</u>

א. 140 ס"מ ו- 1200 סמ"ר.

ב. הצלעות של המלבן החדש הן 48 ס"מ ו- 36 ס"מ, לכן ההיקף של המלבן החדש הוא 168 ס"מ ושטחו 1,728 סמ"ר.

ג. ההיקף גדל ב- 20% ואילו השטח גדל ב- 44%.

ד. 50 ס"מ ו- 60 ס"מ. אורך האלכסון גדל ב- 20%.

ה. סעיף זה מיועד להכליל את הסעיפים הקודמים ועל ידי כך לשלב טכניקה אלגברית פשוטה עם ידע על אחוזים בהקשר של חישובי שטחים והיקפים: א) היקף המלבן הוא $2a+2b$ או $2(a+b)$, שטח המלבן הוא ab. ב-ג) היקף המלבן המוגדל הוא $2(1.2a+1.2b)=2.4ab$, כלומר, אם נגדיל את אורכי הצלעות של מלבן כלשהו ב- 20%, היקפו יגדל ב- 20%. שטח המלבן המוגדל הוא $1.2a\times 1.2b=1.44ab$, כלומר השטח גדל ב- 44%. ד) אורך האלכסון של המלבן המקורי הוא $\sqrt{a^2+b^2}$, אורך האלכסון לאחר הגדלת אורכי צלעות המלבן ב- 20% הוא $\sqrt{(1.2a)^2+(1.2b)^2}=$ $1.2\sqrt{a^2+b^2}$, כלומר אורך האלכסון גדל ב- 20%.

חזרה לתוכן העניינים

שאלות משלבות

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. מצאו ארבע נקודות על גרף הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של טרפז שווה שוקיים.

ב. מצאו חמש נקודות על גרף הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של מחומש כלשהו.

ג. מצאו שלוש נקודות על הגרף של הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של משולש ישר זווית.

ד. אתגר: מצאו שלוש נקודות על הגרף של הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של משולש שווה צלעות.

פתרונות והערות

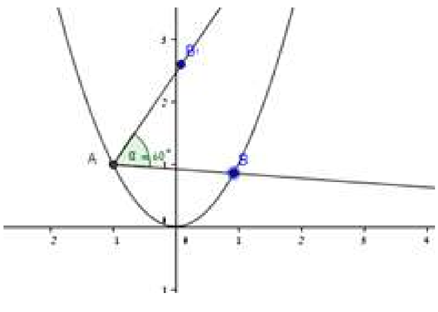
א. כל שני זוגות של נקודות סימטריות ביחס לציר ה- y, יהוו קדקודים של טרפז שווה שוקיים.

ב. כל חמש נקודות על גרף הפונקציה יהוו קדקודים של מחומש.

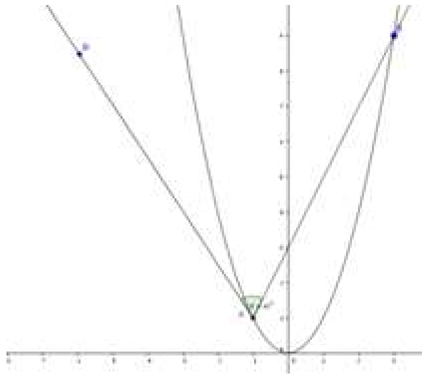
ג. ניתן לבחור נקודה כלשהי על גרף הפונקציה, להעביר דרכה שני ישרים מאונכים ולמצוא את נקודות החיתוך בין הישירים לפרבולה. שלוש הנקודות יקבעו משולש ישר זווית. רצוי לתת לילדים להתנסות בדרך כזו, גם אם זה כרוך בהדרכה בכל שלב. ניתן להדריך את התלמידים לבחור כאחת הנקודות את ראשית הצירים. כמו כן בעזרת שיקולים גיאומטריים ניתן להראות כי שוקיים בעלי שיפוע ±1 יוצרים ביניהם זווית ישרה. קודקודי משולש כזה הם (1 ,1-) ;(1 ,1) ;(0, 0).

ד. טבעי לחפש פתרון לבעיה זאת כאשר אחת הנקודות היא ראשית הצירים. תחת ההנחה הזאת ניתן לפתור בדרך אנליטית או בשיטת ניחוש ובדיקה. אם תלמידים ישרטטו גרף די מדויק, הנקודות $(\sqrt{3},3)$, $(-\sqrt{3},3)$ נראות מתאימות, ובדיקה מראה שהן אכן יוצרות, יחד עם הראשית, משולש שווה צלעות. יש להדגיש ששיטת הניחוש והבדיקה היא לחלוטין לגיטימית. פתרון אנליטי יכול להיראות כך: נסמן את קודקודי המשולש $A(0,0)$ $B(\sqrt{x},x)$ $C(-\sqrt{x},x)$ ונניח שהוא שווה צלעות. אורך הצלע BC הוא $2\sqrt{x}$ ואורך הצלע AB הוא $\sqrt{x^2+x}$. השוואת ביטויים אלה מראה כי $x = 3$.

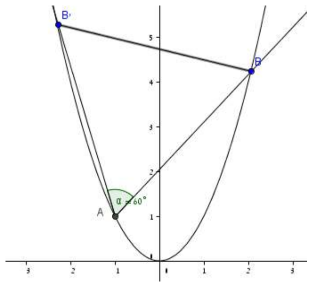
ניתן למצוא שלוש נקודות אחרות כך שיהוו קדקודים של משולש שווה צלעות, אך הבעיה לא פשוטה, ובמקרה זה מומלץ להיעזר בתוכנה של גיאומטרי דינמית ולהיווכח שקיימים אינסוף משולשים כאלה. נבחר קדקוד A כלשהו על "זרוע" אחת של הגרף, ונבחר נקודה B על הזרוע השנייה (ראו שרטוט).



נסמן ב- 'B את הנקודה שיוצרת משולש שווה צלעות יחד עם A ו- B. בשרטוט הנקודה 'B נמצאת בין זרועות הפרבולה. אם נבחר את הנקודה B די גבוהה, ניווכח שהנקודה 'B נמצאת מחוץ לזרועות הפרבולה.



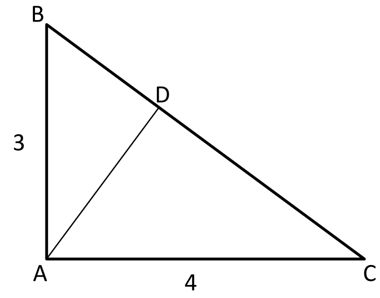
מכאן ברור שתוך כדי גרירת הנקודה B לאורך גרף הפרבולה, יהיה רגע שבו הנקודה 'B חותכת את הזרוע השנייה ויוצרת משולש שווה צלעות.



משיקול זה ברור שיש אינסוף משולשים שווי צלעות שקדקודיהם על גרף הפונקציה.

שאלה 2

נתון כי המשולש ABC הוא ישר זווית. אורך הניצב AB הוא 3 יחידות, ואורך הניצב AC הוא 4 יחידות.
AD מאונך ל- BC.



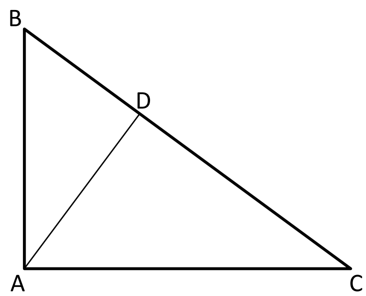
א. מצאו את האורכים של AD, BD ו- DC.

ב. חשבו את שטח המשולש ABC בשתי דרכים שונות ובדקו שמתקבלת אותה תוצאה.

ג. חשבו את שטחי המשולשים ABD ו- DAC ואת היחס בין השטחים.

ד. העשרה: בדקו כי האורך של AD שקיבלתם הוא הממוצע הגיאומטרי של האורכים של BD ו- DC,
כלומר, $AD = \sqrt{BD \times DC}$

ה. העשרה: הוכיחו כי במשולש ישר זווית כלשהו, אורך הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של אורכי שני הקטעים ביתר הנוצרים על ידי הגובה (הקטעים BD ו- DC).



במלים אחרות, כאשר ABC הוא ישר זווית, $AD \perp BC$ מתקיים כי $AD = \sqrt{BD \times DC}$

שאלה 3

א. מצאו ריבוע אשר היקפו (ביחידות אורך) שווה בערכו המספרי לשטחו (ביחידות שטח). מה אורך צלע הריבוע? מה היקפו? מה שטחו?

ב. האם יש ריבועים נוספים בעלי התכונה הזאת? אם כן - מצאו. אם לא - הוכיחו שאין.

ג. האם קיים מלבן שאינו ריבוע אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 16? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ד. האם קיים מלבן אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 18? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ה. האם קיים מלבן אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 30? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ו. האם קיים מלבן אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 14? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ז. (אתגר) השלימו והוכיחו את הטענה הבאה: אם ___ ≤ S אז קיים מלבן יחיד אשר היקפו S יחידות אורך ושטחו S יחידות שטח. אם ___ > S אז לא קיים מלבן כזה. במקרה ש- ___ = S אז ______________.

פתרונות והערות

א. נסמן את אורך צלע הריבוע ב- x, היקפו $4x$ ושטחו x^2. מהתנאי שהיקף הריבוע שווה לשטחו מתקבלת המשוואה $x^2 = 4x$. למשוואה זו פתרון יחיד בתחום השאלה (x חיובי), והוא $x = 4$. ההיקף הוא 16 יחידות אורך והשטח הוא 16 יחידות שטח.

ג. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 8$$

$$ab = 16$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(8 - a) = 16$$

למשוואה ריבועית זו פתרון יחיד:

$$\frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

ולכן המלבן היחיד ששטחו והיקפו שווים ל-16 הוא הריבוע שמצאנו בסעיף הקודם.

ד. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 9$$

$$ab = 18$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(9 - a) = 18$$

למשוואה ריבועית זו שני פתרונות:

$$\frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

ואכן למלבן שאורכי צלעותיו 3 ו- 6 יש היקף של 18 יחידות אורך ושטח של 18 יחידות שטח.

ה. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 15$$

$$ab = 30$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(15 - a) = 30$$

למשוואה ריבועית זו שני פתרונות:

$$\frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{105}}{2}$$

ואכן למלבן שאורכי צלעותיו $12.62 \approx \frac{15+\sqrt{105}}{2}$ ו- $2.38 \approx \frac{15-\sqrt{105}}{2}$ יש היקף של 30 יחידות אורך ושטח של 30 יחידות שטח.

ו. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 7$$

$$ab = 14$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(7 - a) = 14$$

למשוואה זו אין פתרונות.

ז. אם $S \geq 16$ אז קיים מלבן יחיד אשר היקפו S יחידות אורך ושטחו S יחידות שטח. אם $S < 16$ אז לא קיים מלבן כזה. במקרה ש- $S = 16$ המלבן הוא ריבוע.

הוכחה: צריך להראות שבמשוואה הריבועית המתקבלת כאשר $S < 16$, הדיסקרימיננטה שלילית, וכאשר $S \geq 16$ הדיסקרמיננטה חיובית או אפס. נרשום את נוסחת המשוואה הריבועית, הפעם כאשר השטח הוא פרמטר S: $\frac{\frac{S}{2} \pm \sqrt{(\frac{S}{2})^2 - 4S}}{2}$. נחשוב על הדיסקרימיננטה כעל פונקציה d של משתנה S: $d(S) = (\frac{S}{2})^2 - 4S = \frac{1}{4}S(S-16)$. מכאן ברור שהדיסקרימיננטה שלילית כאשר $S < 16$, מתאפסת כאשר $S = 16$, וחיובית כאשר $S > 16$.

<u>פתרון אלטרנטיבי</u>: ניתן לגשת לשאלה גם בצורה המדגישה את האופן בו שטח והיקף של מרובע משתנים כאשר משחקים עם אורכי הצלעות. לדוגמא, את סעיף א' אפשר לפתור על ידי כך ש-"נמתח" ריבוע למלבן מבלי לשנות את ההיקף. ניקח את הריבוע (היחיד) עם היקף 16, ונאריך זוג אחד של צלעות נגדיות ב- t ונקצר זוג שני של צלעות נגדיות ב- t. נקבל מלבן שהיקפו הוא 16 (וכל המלבנים שהיקפם 16 מתקבלים בצורה זו) ואשר שטחו הוא $(4+t)(4-t) = 16 - t^2$. מהמשוואה עולה מיד ששטח המלבן יהיה שווה 16 אם ורק אם $t = 0$, כלומר, אם המלבן הוא ריבוע. לכן, המלבן היחיד בעל היקף ושטח השווים ל-16 הוא ריבוע. באופן דומה: נצא מהריבוע (היחיד) שהיקפו שווה ל-18 (שטחו 20.25) ושוב נבחן את שטח המלבן המתקבל מהארכת זוגות של צלעות נגדיות ב- t וב- $-t$ בהתאמה. שטח המלבן יהיה $20.25 - t^2$ ופתרון המשוואה $20.25 - t^2 = 18$ יראה שיש רק מלבן אחד (עד כדי חפיפה) שהיקפו ושטחו שווה 18. מהלך דומה ניתן לעשות עם ריבוע שהיקפו 30 ועם ריבוע שהיקפו 14. במקרה האחרון נסיק ששטחו של מלבן בעל היקף 14 שווה ל- $12.25 - t^2$, ובפרט קטן מ-14, כלומר לא קיים מלבן ששטחו והיקפו שווים 14.

<u>שאלה 4</u>

א. מצאו את אורכי האלכסונים של מעוין אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 20.

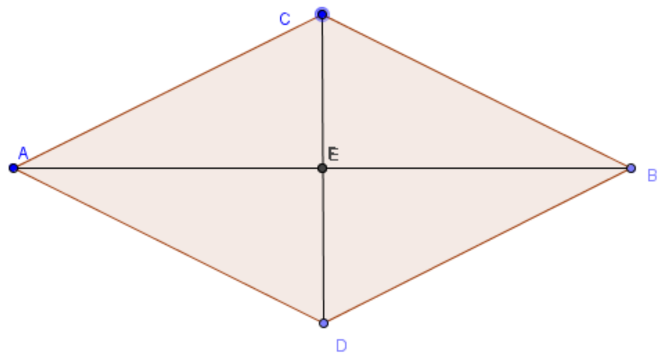
ב. מצאו את אורך הגובה של המעוין של הסעיף הקודם. (תזכורת: גובה של מקבילית הוא הקו המחבר שתי צלעות נגדיות של המקבילית - או המשכן - ויוצר איתן זוויות ישרות).

ג. מצאו את אורכי האלכסונים ואת גובהו של מעוין אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 9.

ד. האם עבור כל מספר נתון הן כהיקף והן כשטח מעוין (ביחידות המתאימות) תמיד קיים מעוין? אם כן הוכיחו, אם לא הסבירו.

<u>פתרונות והערות</u>

א. כיוון שהיקפו של המעוין הוא 20 יחידות אורך, אורך כל צלע הוא 5.



לכן מתקיים כי:

$$AE^2 + CE^2 = AC^2 = 25$$

כיוון ששטח המעוין הוא 20 יחידות שטח, מתקיים כי:

$$AE \cdot CE = 10$$

הצבת המשוואה השנייה בראשונה מניבה משוואה דו-ריבועית (ממעלה רביעית) אותה ניתן לפתור בעזרת פתרון של משוואה ריבועית תחילה:

$$AE^2 + \left(\frac{10}{AE}\right)^2 = 25$$

פתרון משוואה זו מראה כי $\mathrm{AE}^2=\frac{25\pm15}{2}$ אשר נותן שני פתרונות חיוביים עבור מחצית האלכסון של המעוין: $\sqrt{5}$ ו- $\sqrt{20}$. כלומר, קיים רק מעוין אשר אלכסוניו $\sqrt{20}$ (או $2\sqrt{5}$) ו- $2\sqrt{20}$ (או $4\sqrt{5}$).

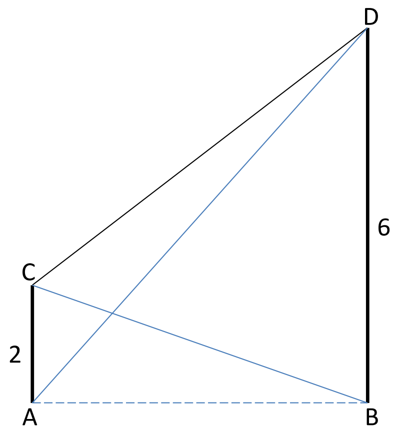
ב. חישוב שטח המקבילית הוא מכפלת אורך הצלע באורך הגובה. השטח (נתון) הוא 20 ואורך הצלע הוא 5 (נתון, כי הוא רבע ההיקף), ולכן הגובה 4 יחידות אורך.

ג. מהלך הפתרון דומה: המשוואה שמתקבלת היא: $\mathrm{AE}^2+\left(\frac{6}{\mathrm{AE}}\right)^2=9$. אם מנסים לפתור מתקבלת תוצאה בלתי אפשרית: $AE^2=\frac{9\pm\sqrt{-63}}{2}$. לכן לא קיים מעוין כזה.

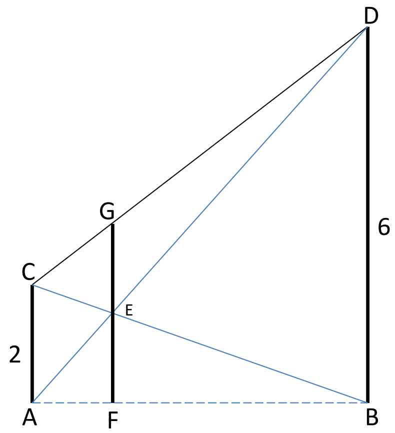
ד. על פי סעיף ג, ראינו כי לא תמיד קיים מעוין אשר מספר יחידות אורך של היקפו שווה למספר יחידות שטח של שטחו. ניתן לגלות כי רק כאשר $S\geq16$ קיים מעוין יחיד אשר היקפו S יחידות אורך ושטחו S יחידות שטח. אם $\mathrm{S}=16$ המעוין הוא ריבוע.

שאלה 5[7]

באתר בנייה העמידו שני עמודים AC ו- BD, בגובה 2 מטר ו-6 מטר, וחיברו עם כבל את הקצה העליון של המוטות (קטע CD באיור). כמו כן, חיברו בכבל כל קצה עליון עם הקצה התחתון של המוט השני (קטעים AD ו- CB באיור).



על מנת לחזק מבנה זה, הוסיפו מוט שלישי (GF), במקביל למוטות הקיימים כפי שמתואר באיור הבא:



א. שרטטו את התרשים על נייר משובץ ואמדו את אורך המוט GF. שרטטו שוב (עם אותם אורכים של AC ו- BD), אך הפעם הרחיקו קצת את המוטות ובדקו את השתנות אורך GF ביחס למרחק בין המוטות.

ב. חשבו את אורך GF.

[7] בהשראת "פעילות 12 – מוטות הרמוניים" מתוך הספר *על השתנות גיאומטרית וגרפים* (1999), מאת א. הרכבי ונ. הדס, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. רחובות.

ג. (אתגר) הכלילו כאשר אורך AC הוא a ואורך BD הוא b

<u>שאלה 6</u>

א. אורך צלע של ריבוע הוא 10 ס"מ. מגדילים כל אחת מהצלעות ב- 20%, בכמה אחוזים יגדל שטחו?

ב. אורך צלע ריבוע הוא 10 ס"מ. מגדילים כל אחת מהצלעות ב- 20%, בכמה אחוזים יגדל היקפו?

ג. x הוא אורך צלע של ריבוע. מגדילים זוג צלעות נגדיות ב- 10% ואת הזוג השני ב- 30%, בכמה אחוזים יגדל השטח?

ד. מגדילים זוג צלעות נגדיות של ריבוע ב- 50% ומקטינים את הזוג השני ב- 50%. האם השטח יגדל, יקטן או לא ישתנה? הסבירו.

ה. אורך צלע של ריבוע הוא 10 ס"מ. מגדילים זוג צלעות נגדיות ב-x אחוזים ומקטינים את הזוג השני ב- x אחוזים. הראו כי השטח קטן ומצאו בכמה אחוזים הוא קטן.

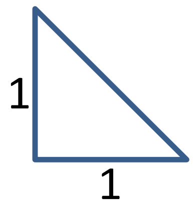
ו. הראו כי אורך האלכסון של המלבן שהתקבל בסעיף הקודם גדל ביותר מ-10% בהשוואה לאלכסון הריבוע.

חזרה לתוכן העניינים

גאומטריה – רמה בסיסית

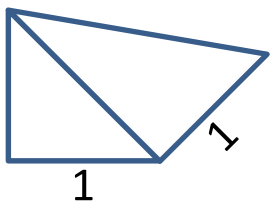
שאלה 1

א. בשרטוט משולש ישר זווית ושווה שוקיים. הראו שאורך היתר שלו הוא $\sqrt{2}$.

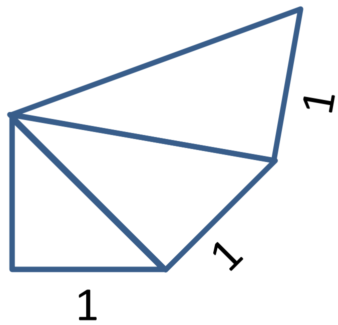


ב. בנו משולש שני, ישר זווית אף הוא, בצמוד למשולש הקודם באופן הבא: אורך הניצב הקטן הוא 1 והניצב הגדול הוא היתר של המשולש הקודם (ראו שרטוט):

חשבו את אורך היתר של המשולש החדש.



ג. ממשיכים את הבנייה באופן דומה: בונים משולש שלישי (ישר זווית), צמוד למשולש השני, כך שאורך הניצב הקטן שלו הוא 1, וניצב הגדול הוא היתר של המשולש השני (ראו שרטוט):



חשבו את אורך היתר של המשולש השלישי.

ד. חשבו את השטח של כל אחד מהמשולשים (היעזרו בכפתור $\sqrt{x}$ במחשבון).

ה. המשיכו את הבנייה עד שתקבלו משולש ישר זווית בו היתר הוא באורך $\sqrt{6}$.

פתרונות והערות

שאלה זו מיועדת לתרגל את השימוש במשפט פיתגורס, לבצע חישובים עם שורשים ולקבל תוצאות שהן מספרים אי-רציונליים בהקשר גיאומטרי.

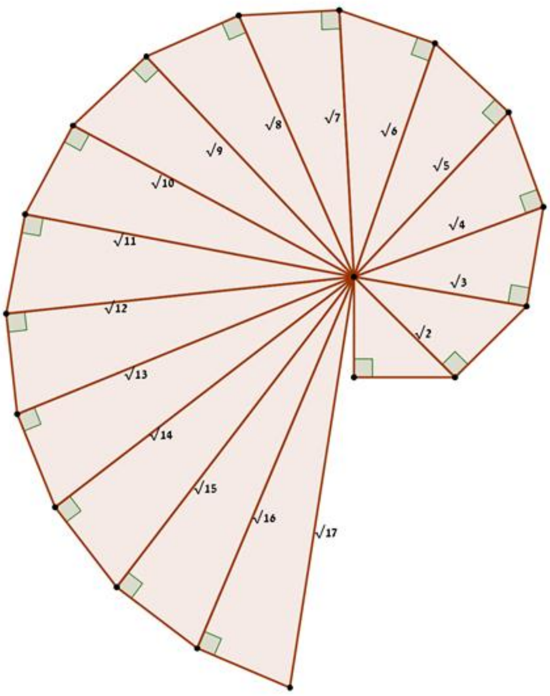
א. $\sqrt{2} \cong 1.41$

ב. $\sqrt{3} \cong 1.73$

ג. $\sqrt{4} = 2$

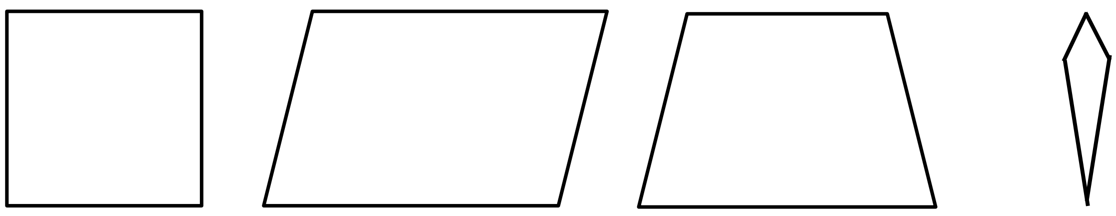
ד. $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.7$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.86$.

ה. שלושת השלבים שבסעיפים שלעיל מתארים שלביה הראשונים של הבנייה המוכרת בשם "ספירלה של תיאודורוס", בה בונים קטעים בעלי אורך $\sqrt{n+1}$, כאשר נתון קטע באורך $\sqrt{n}$. לפי שיקול דעתם של המורים ניתן להראות רק את השלבים הראשונים או את כולם. להלן איור של הספירלה:



שאלה 2

להלן סרטוטים של ארבעה מרובעים: דלתון, טרפז שווה שוקיים, מקבילית וריבוע.



ריבוע   מקבילית   טרפז שווה שוקיים   דלתון

א. סמנו באותיות את ארבעת הקדקודים של כל אחד מהמרובעים. בכל אחד מהם, שרטטו אלכסון אחד בלבד. באלו מהמרובעים מתקבלים משולשים חדי-זווית, ישרי-זווית וקהיי- זווית?

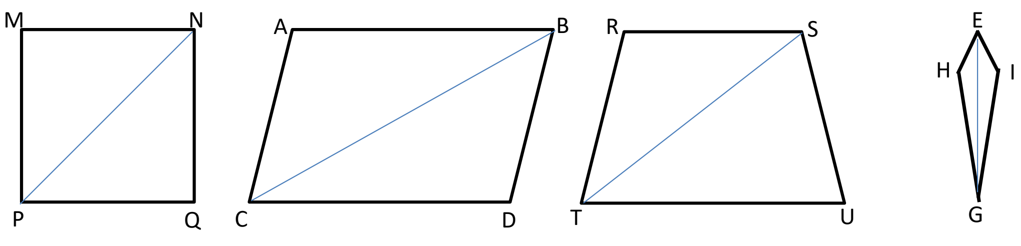
ב. האם שני המשולשים שהתקבלו בתוך כל מרובע (בסעיף הקודם) הם חופפים? הסבירו.

ג. אילו מרובעים ניתן להרכיב משני משולשים שווה צלעות? הסבירו.

ד. דני טוען שהוא יכול לבנות דלתון בעזרת שני משולשים ישרי זווית חופפים. האם הוא צודק? הסבירו.

פתרונות והערות

א.



בריבוע: נוצרים שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים. רצוי לדון עם התלמידים כי אותו דבר יקרה אם נשתמש באלכסון השני. בנוסף, כדאי גם שתלמידים יבחינו כי המשולשים הם חופפים (על פי צ.צ.צ).
במקבילית: תלוי איזה אלכסון משרטטים. אם משרטטים את האלכסון הארוך מבין השניים מתקבלים שני משולשים קהיי-זווית (ABC ו- BCD). אם משרטטים את האלכסון הקצר מתקבלים שני משולשים

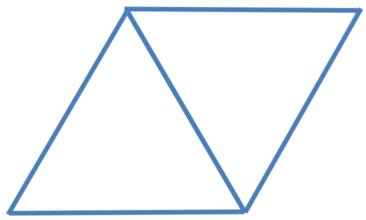
חדי-זווית (ABD ו- ACD). אם יתקבלו משולשים ישרי- זווית, אזי המקבילית היא מלבן (שיכול להיות גם ריבוע).

בטרפז: יתקבלו שני משולשים אחד חד-זווית והשני קהה-זווית.

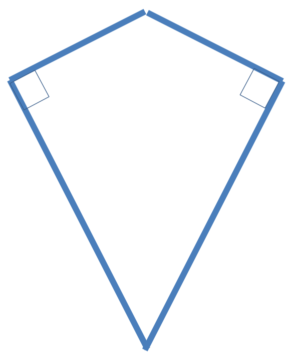
בדלתון: במקרה של שרטוט האלכסון הארוך (הראשי), מתקבלים שני משולשים קהיי- זווית (EIG ו- EHG) ואם משרטטים את האלכסון הקצר (המשני) מתקבלים שני משולשים חדי זווית (HEI ו-HIG).

ב. בריבוע ובמקבילית מתקבלים שני משולשים חופפים בשני המקרים (על פי צ.צ.צ). בטרפז המשולשים אינם חופפים באף מקרה. בדלתון, מתקבלים משולשים חופפים רק על ידי שרטוט האלכסון הארוך (הראשי) (על פי צ.צ.צ.).

ג. רצוי לתת לתלמידים לגזור שני משולשים שווי צלעות ולנסות להרכיב צורות מרובעות בעזרתם. בכל דרך שנצמיד צלע לצלע נקבל מקבילית שהיא מעוין.

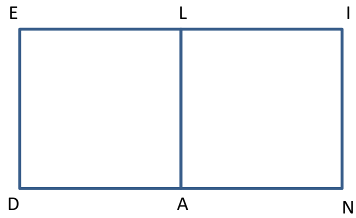


ד. שני משולשים ישרי זווית חופפים (שאינם שווי שוקיים) ניתנים להצמדה באופן הבא כדי ליצור דלתון:



שאלה 3

נתון כי ELAD ו- LINA ריבועים (ראה שרטוט).



העבירו את האלכסונים של LINA וסמנו את נקודת המפגש שלהם ב- Q. העבירו את האלכסונים של ELAD וסמנו את נקודת המפגש שלהם ב- P.

א. איזה מרובע הוא LPAQ? נמקו.

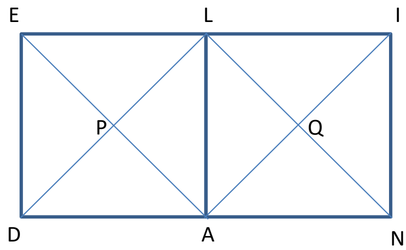
ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המרובע LPAQ, אם ידוע כי אורך EL הוא 3 ס"מ.

ג. מצאו את שטחו של המרובע LPAQ.

ד. מצאו את היקפו של המרובע LPAQ.

פתרונות והערות

א.



LPQA הוא ריבוע (כל צלעותיו שוות באורכן כי הן חצאי אלכסונים של ריבועים שווים, וכל זוויותיו ישרות).

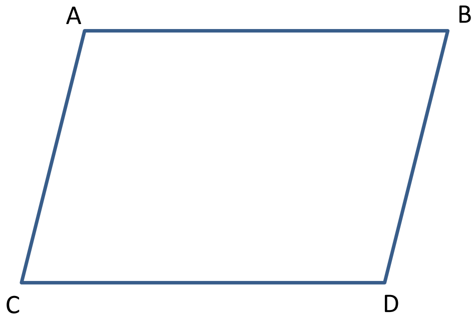
ב. האלכסונים של LPAQ הם LA ו- PQ, שאורכם כאורך צלע הריבוע, 3 ס"מ.

ג. ניתן למצוא את שטחו של LPAQ בכמה דרכים. למשל: הוא מורכב משניים מארבעת המשולשים של ELAD ולכן שטחו חצי משטחו, כלומר 4.5 סמ"ר. ניתן למצוא את השטח על ידי חישוב צלע כפול צלע: $4.5 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}$ סמ"ר. כמו כן, ניתן לחשב על ידי מחצית מכפלת אורך האלכסונים.

ד. $6\sqrt{2}$ ס"מ.

<u>שאלה 4</u>

נתונה מקבילית ABDC.



א. בעזרת קו ישר, חלקו את המקבילית לשתי מקביליות.

ב. בעזרת קו ישר, חלקו את המקבילית לשני משולשים.

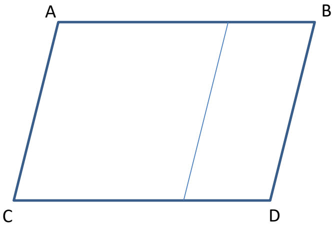
ג. בעזרת קו ישר, חלקו את המקבילית לשני טרפזים.

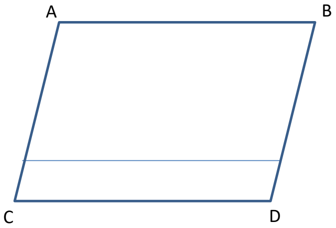
ד. בעזרת קו ישר, חלקו את המקבילית למשולש וטרפז.

ה. בעזרת קו ישר, חלקו את המקבילית למשולש ומחומש.

<u>פתרונות והערות</u>

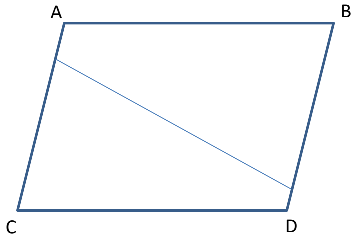
א. להלן שתי חלוקות אפשריות. רצוי שתלמידים יסיקו מתוך ההתנסות כי כדי לקבל מקביליות קו החלוקה חייב להיות מקביל לשתיים מצלעות המקבילית.

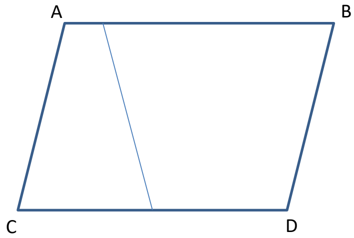




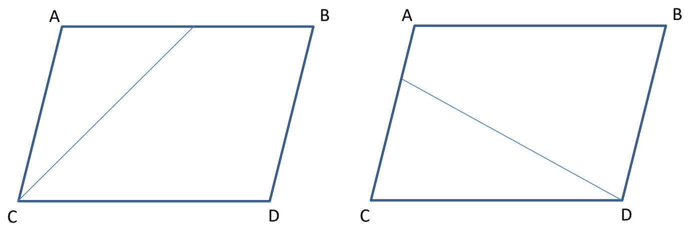
ב. רק האלכסונים יחלקו את המקבילית שלני משולשים.

ג. להלן שתי חלוקות אפשריות:

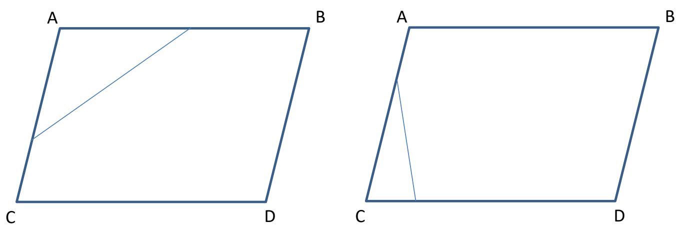




ד. להלן שתי אפשרויות:



ה. להלן שתי אפשרויות:



סביר להניח שיתקבלו פתרונות שונים מתלמידים שונים ומורים יוכלו לקיים על כך דיון בכיתה.

<u>שאלה 5</u>

א. במערכת צירים, סמנו ארבע נקודות כך שהן יהוו קדקודים של מלבן ששטחו 12 יחידות ריבועיות.

ב. במערכת צירים, סמנו ארבע נקודות כך שהן יהוו קדקודים של ריבוע.

ג. במערכת צירים, סמנו ארבע נקודות <u>על הצירים</u> כך שהן יהוו קדקודים של ריבוע.

ד. במערכת צירים, סמנו ארבע נקודות כך שהן יהוו קדקודים של טרפז שווה שוקיים.

ה. במערכת צירים, סמנו ארבע נקודות כך שהן יהוו קדקודים של דלתון אשר האלכסון הראשי שלו נמצא על ציר ה- x.

שאלה 6

א. סמנו במערכת צירים את הנקודות (0,0), (1,0) ו- (0,1).

ב. מצאו שיעורים של נקודה רביעית, כך שארבע הנקודות יהיו קדקודים של ריבוע.

ג. מצאו שיעורים של נקודה רביעית, כך שארבע הנקודות יהיו קדקודים של טרפז.

ד. מצאו שיעורים של נקודה רביעית, כך שארבע הנקודות יהיו קדקודים של דלתון שאיננו ריבוע.

ה. מצאו שיעורים של נקודה רביעית, כך שארבע הנקודות יהיו קדקודים של מקבילית שאינה ריבוע.

פתרונות

ב. קיימת רק נקודה אחת כזאת ושיעוריה הם (1,1).

ג. כל הנקודות הנמצאות על הישר $x = 1$ (פרט לנקודות הנתונה (1,0) ו- (1,1)) יהוו קדקוד רביעי לטרפז. באופן דומה כל הנקודות על הישר $y = 1$ ((פרט לנקודות הנתונה (0,1) ו- (1,1)) יהוו קדקוד רביעי של טרפז.

ד. יש אינסוף נקודות על הישר $y = x$ שיכולות להוות קדקוד רביעי של דלתון שאיננו ריבוע. למעשה כל נקודה על הישר מתאימה פרט לשלוש: (0,0) - כי אז יש רק 3 קדקודים שונים - (1,1) - כי אז הדלתון הוא ריבוע - ו- (1/2,1/2) - כי אז שלושה קדקודים נמצאים על ישר אחד. אם $x > \frac{1}{2}$ הדלתון יהיה קמור, אם $x < \frac{1}{2}$ יתקבל דלתון קעור.

ה. הנקודות היחידות האפשריות הן (-1,1) או (1,-1). במקרים אלה מתקבלת מקבילית שהיא מעוין.

שאלה 7

להלן קבוצות של ארבע נקודות המהוות קדקודים של מרובעים. בכל מקרה ניתנים שיעורי הנקודות. קבעו בכל מקרה את סוג המרובע ונמקו.

א. (1,-1), (2,0), (1,1), (0,0)

ב. (1,-7), (2,0), (1,7), (0,0)

ג. (-1,1), (3,1), (2,0), (0,0)

ד. (3,4), (4,3), (1,0), (0,1)

תשובות והערות

א. ריבוע – כל צלעותיו שוות זו לזו (באורך $\sqrt{2}$), וכל זוויותיו ישרות (הצלעות הסמוכות הן על ישרים ששיפועיהם 1 או 1-). יש לשים שבגלל יחסי ההכלה בין המרובעים, תשובות כגון מקבילית (כי צלעות נגדיות הן מקבילות), מלבן (כי כל הזוויות ישרות), מעוין (כי כל הצלעות שוות), דלתון (כי האלכסונים מאונכים ואחד חוצה את השני) הן תשובות חלקיות אך לא שגויות.

ב. מעוין – צלעות נגדיות מקבילות (נמצאות על ישרים בעלי אותו שיפוע) והן באורך שווה ($\sqrt{50}$). יש לשים שבגלל יחסי ההכלה בין המרובעים, תשובות כגון מקבילית או דלתון הן חלקיות אך לא שגויות.

ג. טרפז שווה שוקיים – זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג הצלעות האחר הוא באורך שווה ($\sqrt{2}$) ואינן מקבילות.

ד. מלבן – שתי זוגות של צלעות מקבילות בעלות אורך שווה ($\sqrt{2}$ ו- $\sqrt{18}$) וכל הזוויות ישרות. יש לשים שבגלל יחסי ההכלה בין המרובעים, התשובה מקבילית היא חלקית אך אינה שגויה. בכיתות בהן התלמידים אינם מכירים את תנאי המאונכות (שיפועים הופכיים ונגדיים) ניתן להסתפק בנימוק שמבוסס על הסתכלות בשרטוט).

שאלה 8[8]

משחק המשולשים מכיל חבילת קשים לשתייה. להלן ההוראות:

- א' לוקח/ת אחד מהקשים, חותך/ת ממנו קטע ולוקח/ת את הקטע לעצמו/ה כך שישמש צלע של משולש. את מה שנשאר מהקש, הוא/היא מוסר/ת ל- ב'.
- ב' חותך/ת את קטע הקש שקיבל/ה לשני חלקים, כך שיהיה אפשר לבנות משולש משני קטעים אלה והקטע של א'.
- אם ב' מצליח/ה להרכיב משולש, הוא/היא מקבל/ת נקודה לזכותו/ה, אם הוא/היא אינו/הה מצליח/ה א' מקבל/ת נקודה לזכותו/ה.
- השחקנים מתחלפים בתפקידים והניצחון נקבע על פי מספר הנקודות.

א. שלמה גילה שיטה שאם הוא השחקן הראשון בכל סיבוב הוא תמיד ינצח. מה שיטתו?

ב. בגלל שיטתו של שלמה, שינו את כללי המשחק: השחקן הראשון חותך את הקש לשני קטעים. השחקן השני בוחר באחד הקטעים וחותך לשניים כך ששלושת הקטעים ירכיבו משולש. שלמה גילה גם הפעם שיטה לנצח אם הוא הראשון בסיבוב. מה שיטתו?

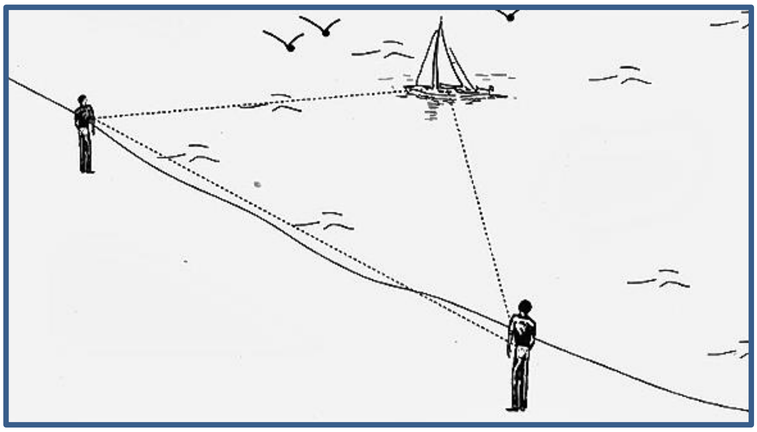
פתרונות והערות

על מנת להתיידד עם המשחק, רצוי שהתלמידים ישחקו מספר פעמים לפי הכללים שניתנים בהתחלה. מטרת המשחק היא לחוש מתי ניתן ליצור משולש משלושה אורכים נתונים ומתי לא. השאלות מאלצות את התלמידים לחשוב על אסטרטגיות, לאחר היכרות עם המשחק והתנסות בו.
האסטרטגיה של שלמה עשויה להיות לחתוך את הקש לשני קטעים שאינם שווים, ולהשאיר אצלו את הקטע הארוך. כל חיתוך של הקטע השני, הקצר יותר ייצור שני קטעים איתם אי- אפשר לבנות משולש. שינוי הכללים נותן את הרושם שהפעם השחקן השני תמיד ינצח כי הוא יבחר בקטע הארוך, אך אם השחקן הראשון מחלק את הקש לשני חלקים שווים, לא ניתן יהיה ליצור משולש.

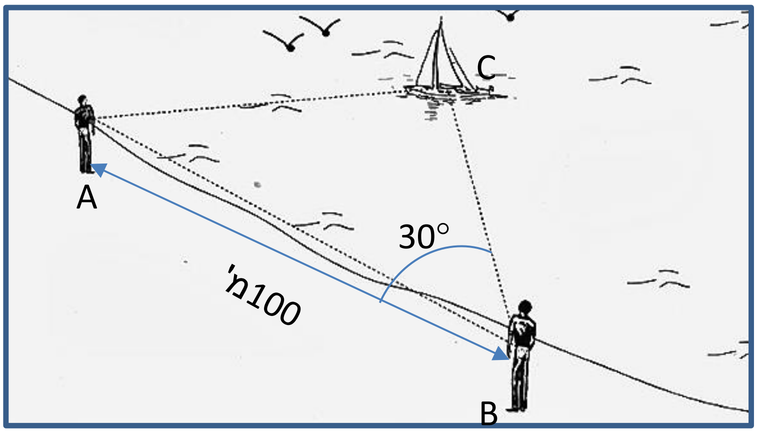
[8] בהשראת הספר "רואים ועושים גיאומטריה" מאת ת. הלוי ור. בוהדנה, בהוצאת מכון ויצמן למדע, ע' 81.

<u>שאלה 9</u>[9]

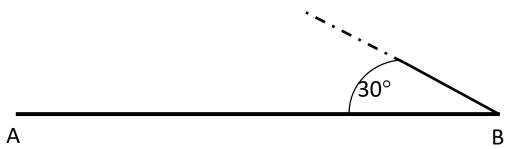
בני ואדווה עומדים על המזח במרחק 100 מטר זה מזו וצופים אל הים (ראו איור). נסמן ב- A את מקומה של אדווה וב- B את מקומו של בני. סירה נמצאת בים בנקודה C.



א. בעזרת מכשיר מיוחד, בני מדד את הזווית ABC - הזווית בין אדווה לבין הסירה מנקודת מבטו. הזווית היא בת 30°.

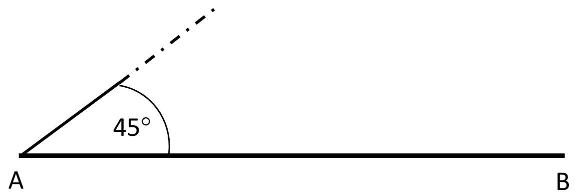


סמנו בשרטוט למטה היכן יכולה להימצא הסירה (מנקודת מבטו של בני).

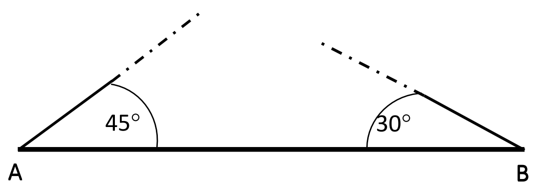


[9] בהשראת הספר "רואים ועושים גיאומטריה" מאת ת. הלוי ורץ בוהדנה, בהוצאת מכון ויצמן למדע, ע' 95.

ב. בעזרת מכשיר מיוחד, אדווה מדדה את הזווית BAC - הזווית בין בני לבין הסירה מנקודת מבטה. הזווית היא בת $45°$. סמנו בשרטוט היכן יכולה להימצא הסירה מנקודת מבטה של דינה.



ג. נסמן על שרטוט אחד את הנתונים של דו ודינה. סמנו ב- C היכן נמצאת הסירה.



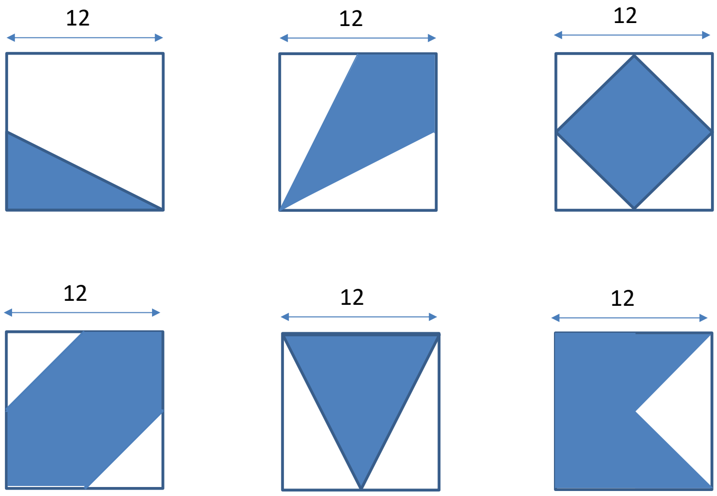
ד. האם ניתן לקבוע בוודאות היכן נמצאת הסירה?

<u>פתרונות והערות</u>

שאלה זו נועדה לתת הצדקה אינטואיטיבית למשפט החפיפה השני, לא בהקשר של השוואה בין שני משולשים אלא כתנאים לקביעת משולש יחיד בסיטואציה מן המציאות. כלומר, בהינתן מרחק בין שתי נקודות ושתי זוויות הנוצרות בשני קצותיו, נקבעת באופן יחיד נקודה שלישית. התחושה האינטואיטיבית נוצרת באופן הדרגתי ותוך כדי התנסות. תחילה קובעים כי הסירה נמצאת על הקרן היוצאת מ- B בזווית בת 30°, לאחר מכן קובעים כי הסירה נמצאת על הקרן היוצאת מ- A בזווית בת 45°. לבסוף, מאריכים את הקווים עד שהקרניים נחתכות. הבנייה היא יחידה על סמך משפט החפיפה ז.צ.ז.

שאלה 10: שברים בריבוע

סמנו בריבועים הבאים איזה חלק ממנו צבוע והסבירו כיצד מצאתם (יש לשים לב כי כל קדקודי המרובעים הצבועים חלים על קודקודי הריבוע או על מרכזי צלעות הריבוע).

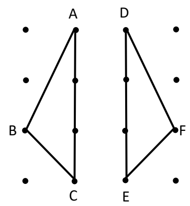


פתרונות והערות

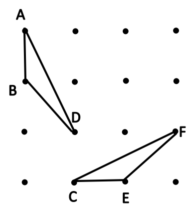
ניתן למצוא את שטחי האזורים הצבועים על ידי חישובים או על ידי שיקולים גיאומטריים. החלקים הצבועים מימין לשמאל בשורה העליונה הם: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ובשורה התחתונה $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. בכיתות מתקדמות ניתן לבקש חישוב של היקפים. כמו כן, ניתן לבקש לצבוע אזור ששטחו הוא $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$.

שאלה 11

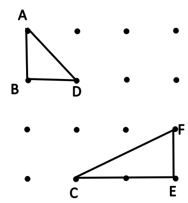
א. ברשת (שריג ריבועי) משורטטים שני משולשים. האם המשולשים חופפים? הסבירו.



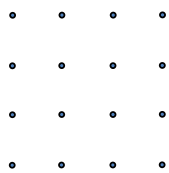
ב. ברשת הנקודות משורטטים שני משולשים. ידוע כי המרחק (האנכי והאופקי) בין שתי נקודות קרובות הוא 1. האם המשולשים חופפים? הסבירו.



ג. ברשת הנקודות משורטטים שני משולשים. ידוע כי המרחק (האנכי והאופקי) בין שתי נקודות קרובות הוא 1. האם המשולשים חופפים? הסבירו.



ד. שרטטו עוד זוג של משולשים חופפים בשריג, והסבירו מדוע הם אכן חופפים.



פתרונות והערות

בשאלה זו נעזרים ברשת הנקודות כדי לקבוע שוויון של אורכי קטעים ועל ידי כך להתבסס על משפט החפיפה צלע-צלע-צלע כדי לקבוע חפיפה בין שני משולשים.

א. המשולשים חופפים כי AB=DF=$\sqrt{5}$, BC=EF=$\sqrt{2}$, AC=DE=3. (תלמידים יוכלו גם לקבוע שוויון בין צלעות מבלי לחשב, למשל AB ו- DF שווים באורכם כי שניהם אלכסונים של מלבן 1x2. ניתן גם להזכיר שיקולים של סימטריה, אם התלמידים למדו את הנושא.

ב. AB=CE=1, BD=EF=$\sqrt{2}$, AD=CF=$\sqrt{5}$

ג. המשולשים אינם חופפים, יש להם רק זוג אחד של צלעות שהן שוות בהתאמה.

ד. ניתן להוסיף אילוץ נוסף, כגון ששטחם של המשולשים החופפים יהיה יחידה אחת.

<u>שאלה 12</u>

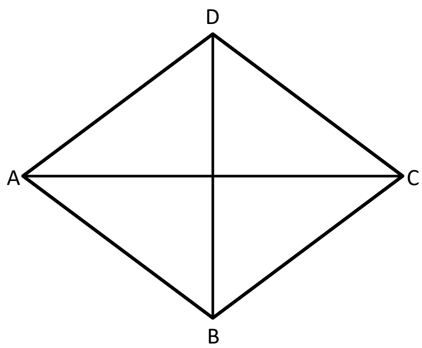
א. שרטטו מעוין אשר אלכסוניו הם באורך 12 ו-16. מצאו את שטחו.

ב. מצאו את היקפו של המעוין.

ג. האם תוכלו ליצור מרובע אחר (שאיננו מעוין) בעל אותם אלכסונים?

<u>פתרונות והערות</u>

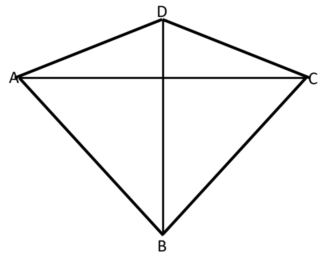
א. AC=16, BD=12



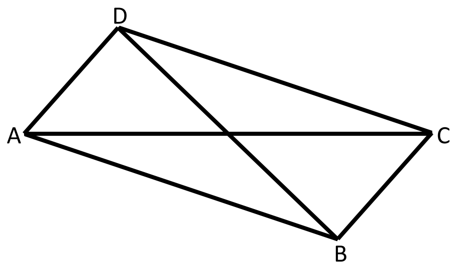
בדרך כלל תלמידים אינם יודעים (או אינם זוכרים) כי ניתן לחשב את שטח המעוין על ידי מחצית מכפלת אורכי האלכסונים. במקרה זה, רצוי לבנות שלב אחר שלב את חישוב השטח, למשל, כסכום של שטחי שני המשולשים ADC ו- ABC. בכל אחד מהם הבסיס הוא 16, גובהם 6 (מחצית אורך האלכסון השני – כי במעוין האלכסונים מאונכים וחוצים זה את זה), לכן כל אחד מהמשולשים הוא בעל שטח של 48 יחידות, ולכן שטח המעוין הוא 96. עם תלמידים מתקדמים ניתן לראות כי חישוב זה שקול לחישוב השטח כמחצית מכפלת האלכסונים.

ב. כדי למצוא אורך כל צלע יש להשתמש במשפט פיתגורס, באחד מארבעת המשולשים שבשרטוט. אורך הניצב הקטן בכל משולש הוא 6 (מחצית אורך האלכסון הקטן) ו- 8 (מחצית אורך האלכסון הגדול). לכן, אורך הצלע של המעוין הוא $\sqrt{8^2+6^2}=10$. לכן ההיקף הוא 40.

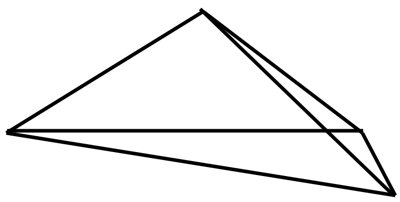
ג. אם נשמור על האלכסונים מאונכים זה לזה, ונדאג שאלכסון אחד יחתוך את השני (אך לא חוצים <u>זה את זה</u>), נקבל דלתון:



אם נשמור על האלכסונים חוצים זה את זה (אך לא מאונכים זה לזה), נוכל לקבל מקבילית שאיננה מעוין:

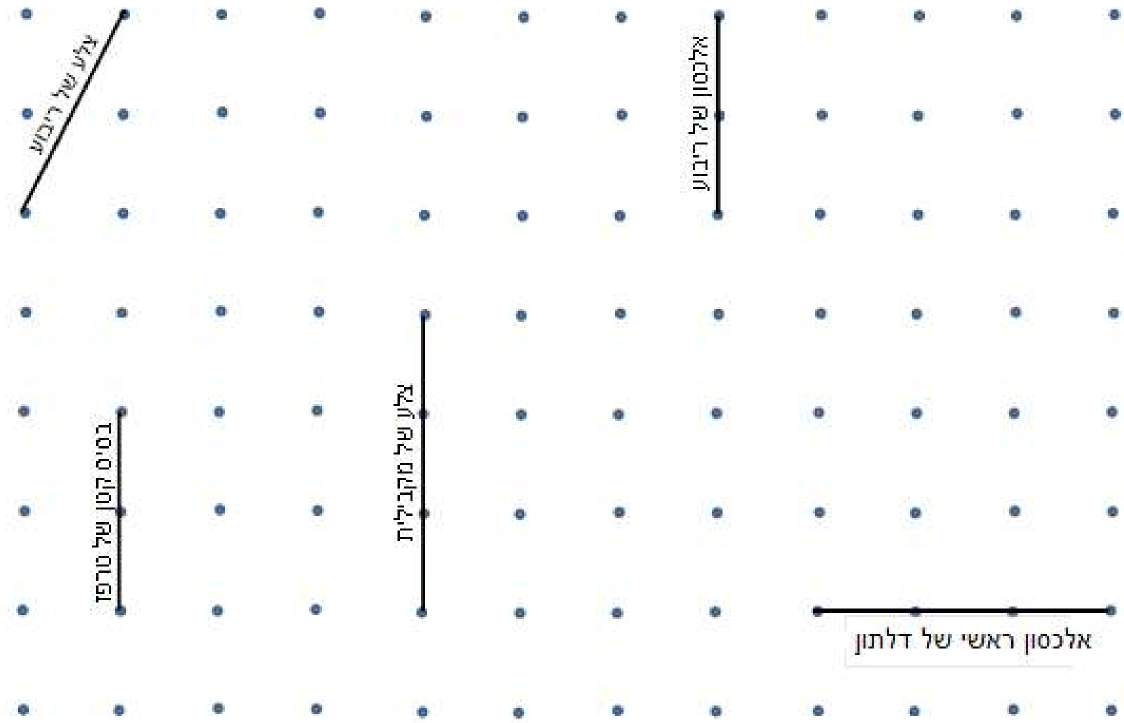


כמובן, נוכל לקבל גם מרובע שאיננו מקבילית או טרפז:

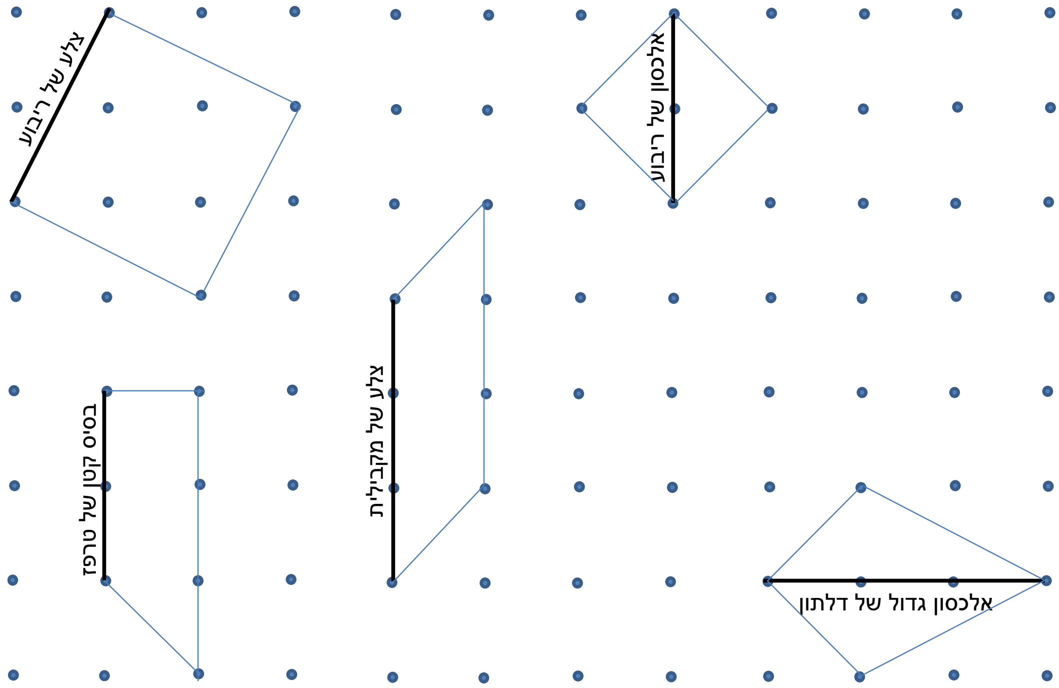


שאלה 13

להלן שריג ריבועי. השלימו כל שרטוט כך שקדקודי המרובע המבוקש יהיו בנקודות השריג. אם אפשר, השלימו את השרטוט בדרכים שונות. השתמשו בסרגל!

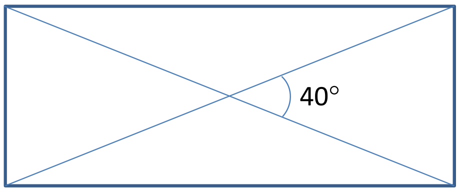


פתרונות


צלע של ריבוע
אלכסון של ריבוע
צלע של מקבילית
בסיס קטן של טרפז
אלכסון גדול של דלתון

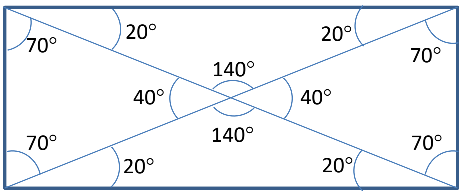
שאלה 14

חשבו את כל הזוויות בשרטוט של המלבן הנתון:



פתרונות והערות

בשאלה זו תלמידים מתבקשים לשלב מה שידוע להם על זוויות בכלל (קדקודיות, צמודות), סכום הזוויות הפנימיות של משולש, תכונות אלכסוני המלבן ומשולשים שווי שוקיים.



<u>שאלה 15</u>

בכל סעיף רשומים השיעורים של ארבע נקודות. בכל מקרה ציינו האם הנקודות האלה הן קדקודים של מרובע, ואם כן מה שמו של המרובע?

א. (-1,-1), (1,-1), (1,1), (-1,1)

ב. (6,1), (5,1), (4,1), (3,1)

ג. (1,0), (0,-23), (-1,0), (0,1)

ד. (2,0), (7,2), (0,2), (0,0)

<u>פתרונות</u>

א. ריבוע (כל הזוויות ישרות, כל הצלעות שוות).

ב. אין מרובע, כל הנקודות על ישר אחד.

ג. דלתון

ד. טרפז ישר זווית

שאלה 16[10]

ברשותכם אוסף קיסמים בעלי אותו אורך.

א. בנו משולש בעזרת שלושה קיסמים. כמה משולשים שונים (שאינם חופפים) ניתן לבנות משלושה קיסמים?

ב. האם ניתן לבנות משולש מארבעה קיסמים?

ג. מלאו את הטבלה הבאה:

מספר הקיסמים	3	4	5	6	7
מתקבל משולש?					
מספר המשולשים					
סוג המשולשים					

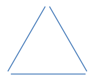
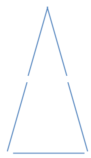
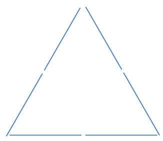
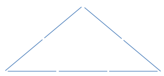
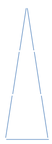
פתרונות והערות

א. כל המשולשים הנבנים משלושה קיסמים בעלי אותו אורך הם שווי צלעות וחופפים.

ב. לא ניתן לבנות אף משולש מארבעה קיסמים: צלע אחת חייבת להיות באורך 2, ואז שתי הצלעות האחרות לא יכולות ליצור משולש (כי סכום האורכים שלהם אינו גדול מ-2).

[10] בהשראת הספר "רואים ועושים גיאומטריה" מאת ת. הלוי ור. בוהדנה, בהוצאת מכון ויצמן למדע, ע' 95.

ג.

מספר הקיסמים	3	4	5	6	7
האם מתקבל משולש?	כן	לא	כן	כן	כן
מספר המשולשים	1	--	1	1	2
סוג המשולשים	שווה צלעות 	--	שווה שוקיים 	שווה צלעות 	שווה שוקיים  

בכיתות מתקדמות ניתן לשאול כמה קסמים דרושים כדי לבנות משולש שונה צלעות.

<u>שאלה 17</u>

שרטטו סקיצה של ריבוע, מלבן (שאינו ריבוע) ודלתון כך שהשטח של כל אחד מהם הוא 36 סמ"ר, ציינו על הצלעות את המידות המתאימות.

<u>פתרונות והערות</u>

הריבוע הוא יחיד, צלעו 6 ס"מ.

יש אינסוף מלבנים ששטחם 36. תלמידים יכולים לנסות מספרים שונים או לחשוב על פירוקים שונים של המספר 36 לשני גורמים, למשל: 18 ו- 2, 12 ו- 3, 0.5 ו- 72.

תלמידים יכולים לנסות או להיעזר בנוסחת השטח של הדלתון (מחצית מכפלת האלכסונים), ולמצוא פירוקים שונים של 72 לשני גורמים שהם יהיו אורכי האלכסונים. את אורכי הצלעות ניתן למצוא בעזרת משפט פיתגורס.

שאלה 18

נתונים שלוש קשיות בעלות אותו אורך. אם מובטחת לנו קשית רביעית באורך כלשהו. אלו מהמרובעים הבאים ניתן לבנות? אם כן שרטטו ואם לא הסבירו מדוע.

ריבוע

מלבן שאיננו ריבוע

מעוין שאיננו ריבוע

מקבילית שאיננה מעוין

דלתון (שאיננו מעוין)

טרפז ישר זווית

טרפז שווה שוקיים

טרפז שאיננו ישר זווית ואיננו שווה שוקיים

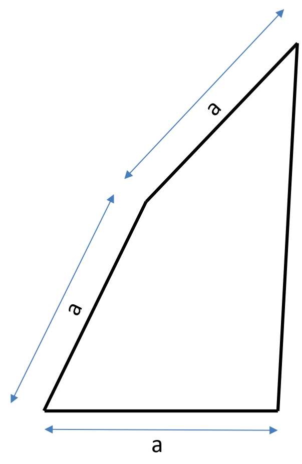
מרובע אחר

פתרונות

ניתן לבנות צורות בהן הצלע הרביעית היא באותו אורך של שלוש הצלעות הנתונות (ריבוע, מעוין שאינו ריבוע). לא ניתן לבנות מלבן, לא ניתן לבנות מקבילית שאיננה מעוין ולא ניתן לבנות דלתון.

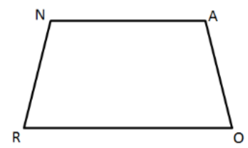
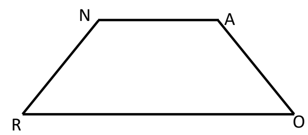
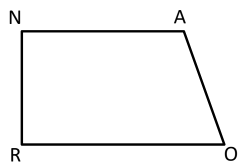
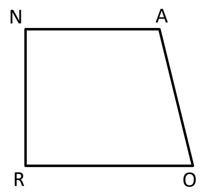
ניתן לבנות טרפז שווה שוקיים (בו הבסיס הקטן שווה לשוקיים) אך לא ניתן לבנות כל טרפז אחר.

ניתן לבנות מרובע אחר בעל שלוש צלעות באורך שווה והרביעית באורך שונה, למשל: על ידי חיבור הקטעים באורך שווה באופן כלשהו ואז על ידי "סגירת" המצולע.

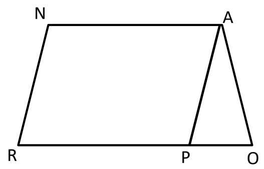
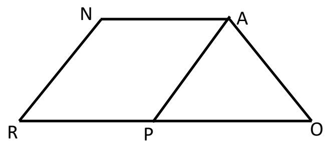
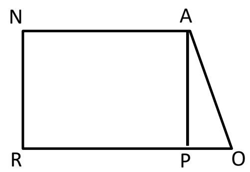
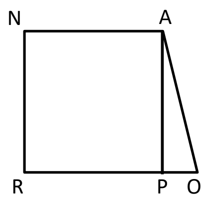


<u>שאלה 19</u>

בכל אחד מהטרפזים הבאים העבירו דרך A מקביל לשוק NR. בכל מקרה רשמו איזה מרובע ואיזה משולש התקבלו. הסבירו.

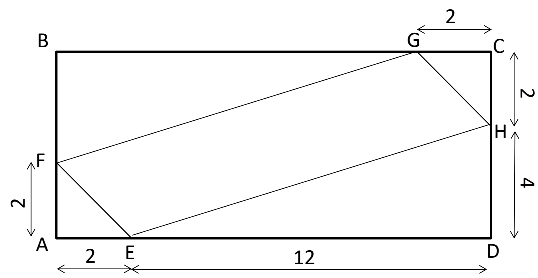
אפיון	שרטוט	הסבר
טרפז שווה שוקיים		
NA=NR=AO		
טרפז ישר זווית		
טרפז ישר זווית בו NA=RN		

<u>פתרונות והערות</u>

אפיון	שרטוט	הסבר
טרפז שווה שוקיים		NAPR מקבילית: AP מקביל ל- NR APO משולש שווה שוקיים: AP=AO
NA=NR=AO		NAPR מעוין: NA=NR=AO=AP APO משולש שווה שוקיים: AP=AO
טרפז ישר זווית		NAPR מלבן: $AP \perp RO$ APO משולש ישר זווית
טרפז ישר זווית בו NA=RN		NAPR ריבוע APO משולש ישר זווית

שאלה 20

נתון המלבן ABCD בתוכו חסום המרובע EFGH.



א. חשבו את השטח של EFGH.

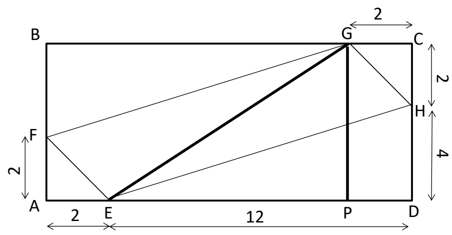
ב. חשבו את אורך האלכסון (EG של EFGH).

ג. (אתגר) האם לדעתכם המרובע EFGH הוא מקבילית? נמקו.

פתרונות והערות

א. ניתן לחשב את שטח המקבילית על ידי חיסור שטח ארבעת המשולשים משטח המלבן, כלומר, 84 – (12x4)/2 – (12x4)/2 – (2x2)/2 – (2X2)/2= 32

ב. האלכסון EG הוא היתר של משולש ישר הזווית EGP:



GP=6, EP=8 לכן $\mathrm{EG} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

ג. בכיתות מתקדמות ניתן להראות זאת כך:

FG=EH (יתרים של שני משולשים חופפים FBG ו- EDH על סמך צ.ז.צ)

EF=GH (יתרים של שני משולשים חופפים FAE ו- GCH על סמך צ.ז.צ)

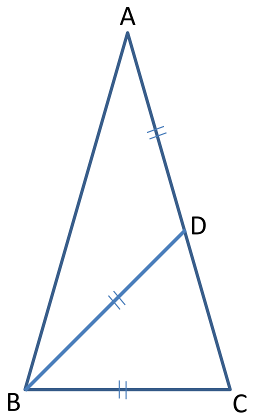
הצלעות הנגדיות מקבילות כי הן בעלות אותו שיפוע. בכיתות אחרות ניתן להסתפק בנימוקים חלקיים.

חזרה לתוכן העניינים

גאומטריה – רמה מתקדמת

שאלה 1

המשולשים BCD ו- ABD הם שווי שוקיים ומרכיבים ביחד את המשולש ABC שאף הוא שווה שוקיים.



מצאו את גודל הזווית A.

פתרונות והערות

המשולשים ABC ו- BCD דומים, כי הם שווי שוקיים שיש להם זווית בסיס משותפת C. הזווית BDC היא מצד אחד זווית בסיס במשולש BCD, מצד שני היא זווית חיצונית לזווית הראש במשולש שווה השוקים ABD שזווית הבסיס שלה DAB היא זווית הראש של משולש ABC. מעובדות אלה נקבל את המשוואות:

$\measuredangle DCB = \frac{180° - \measuredangle A}{2}$ (סכום זוויות במשולש שווה השוקיים ABC)

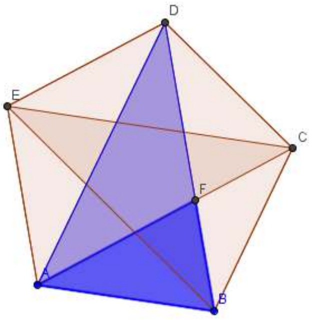
$\measuredangle CDB = 2\measuredangle A$ (זווית חיצונית שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה – משולש ABD)

כיוון ש- $\measuredangle DCB = \measuredangle CDB$ (המשולש BDC הוא שווה שוקיים), נוצרת המשוואה:

$$\frac{180° - \measuredangle A}{2} = 2\measuredangle A$$

אשר פתרונה הוא: $36° = \frac{180°}{5} = \measuredangle CDB$.

<u>שאלה 2</u>

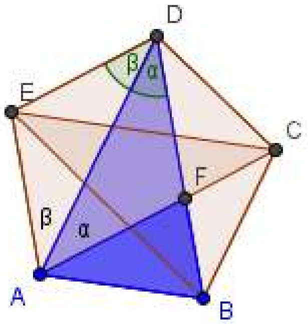


ABCDE הוא מחומש משוכלל.

א. מצאו את גודלי הזוויות של משולשים ABD, AFD ו- BFA. הסיקו מהחישוב שמשולשים ABD ו- BFA דומים.

ב. נתון שאורך צלע המחומש המשוכלל הוא 1 ס"מ. מצאו את אורך הקטע AD. היעזרו בדמיון שהוכחתם בסעיף הקודם. (היחס בין אורך הצלע AD ואורך הצלע AB נקרא יחס הזהב, ומשולש ABD נקרא "משולש זהב").

<u>פתרונות והערות</u>



א. זווית ADB היא זווית הראש של המשולש ADB ולכן היא שווה לזווית הראש של המשולש CAD (המשולשים חופפים). נסמן זווית זו ב- α. משולש ADB הוא שווה שוקיים (שוב משיקולי סימטריה), ולכן זווית הבסיס שלו BAD שווה ל- $\frac{180°-\sphericalangle\alpha}{2}$. נסמן ב- β את הזווית EDA אשר שווה (משיקולי סימטריה) לזווית EAD ולזווית BDC. זוויות של מחומש המשוכלל שוות 108°, ולכן מתקיימות שתי המשוואות:

$$\alpha + 2\beta = 108°$$

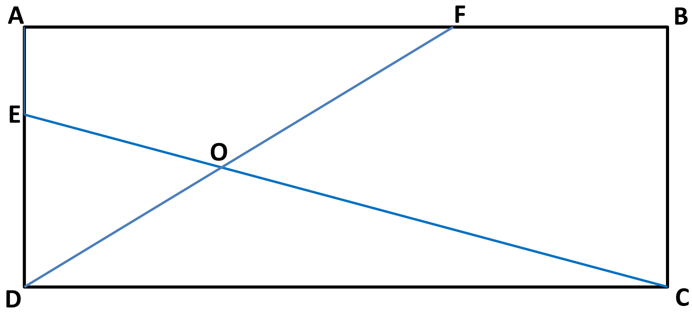
$$\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \beta = 108°$$

פתרון מערכת זו נותן $\alpha = \beta = 36°$. מכאן שזוויות המשולש DAB הן 36° (α), 72° $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$ ו- 72°.
זוויות משולש ADF הן 36° (α), 36° ו- 108°. זוויות משולש ABF הן 36° (72°-α), 72° ו- 72°, ולכן משולשים ABF ו- ADF דומים.

ב. נסמן את אורך הקטע AD ב- x. יחס הבסיס לשוק במשולש שווה השוקיים ABD הוא $\frac{1}{x}$. יחס הבסיס לשוק במשולש שווה השוקיים BFA הוא $\frac{x-1}{1}$. השוואת שני יחסים אלה נותן משוואה ריבועית ששורשה החיובי $1.618 \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>שאלה 3</u>

במלבן שבאיור



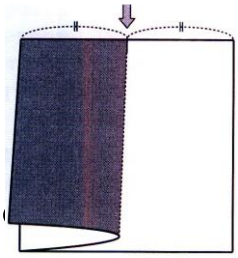
ידוע כי: אורך AE הוא 2 ס"מ, אורך ED הוא 4 ס"מ ואורך AB הוא 15 ס"מ. מצאו את אורך AF אם ידוע גם כי למרובע AEOF ולמשולש DOC אותו שטח.

<u>פתרונות והערות</u>

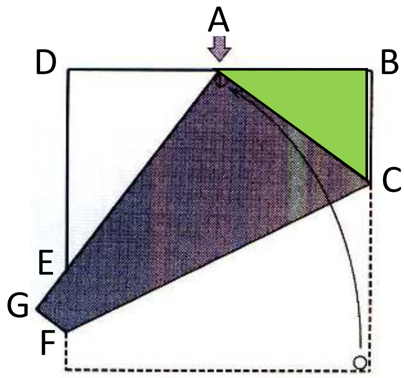
כיוון שהשטח של המרובע AEOF והשטח של המשולש DOC שווה, השוויון יישמר אם נוסיף לכל אחד משטחים אלה את אותו המשולש DEO. על ידי הוספת DEO, AEOF נהיה המשולש DAF, והמשולש DOC נהיה המשולש DEC. ולכן, $\frac{4\cdot 15}{2} = \frac{6\cdot AF}{2}$ ומכאן AF=10.

שאלה 4[11]

- קחו דף ריבועי שאורך צלעותיו 8 ס"מ.
- קפלו צלע אל צלע כדי לסמן את אמצע הצלע העליונה (ראו שרטוט).



- הביאו את הקדקוד הימני התחתון אל הנקודה שסימנתם בצעד הקודם (ראה שרטוט).



א. הראו כי צלעותיו של המשולש ABC הן באורך 3, 4 ו- 5.

ב. הראו כי המשולשים ABC, ADE ו- EFG הם דומים.

פתרונות והערות

א. AB=8 (מחצית הצלע), AC= x, ולכן BC=8 - x. לפי משפט פיתגורס

$$x^2 = (8-x)^2 + 4^2$$

הפתרון היחיד למשוואה זו הוא $x = 5$, ולכן אורך הניצב הקטן הוא 3.

ב. הזווית $\sphericalangle DEA = 90° - A$, גם הזווית $\sphericalangle BAC = 90° - A$, לכן כל הזוויות של המשולשים ABC ו- ADE שוות. הזוויות DEA ו- FEG הן קדקודיות ולכן הן שוות, ולכן המשולשים ADE ו- EFG הם דומים.

---

[11] בהשראת תרגיל מהספר:
Haga, K., Fonacier, J.C. & Isoda, M. (2008). *Origamics – Mathematical Explorations Through Paper Folding*. World Scientific.

<u>שאלה 5</u>

א. חשבו בשתי דרכים שונות את סכום הזוויות הפנימיות של משובע קמור (מצולע בעל שבע צלעות).

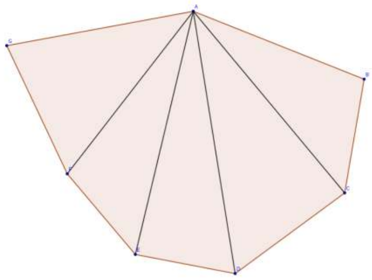
ב. כמה אלכסונים יש למשובע? האם תשובתכם נכונה לכל משובע, כולל משובעים קעורים?

ג. מה סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור בעל n צלעות וכמה אלכסונים יש לו?

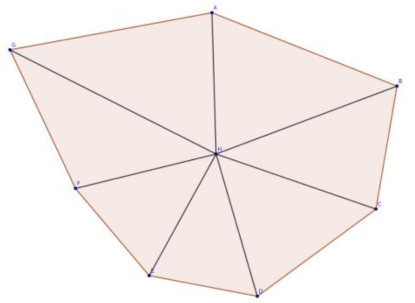
ד. כמה צלעות יש למצולע אשר בו 35 אלכסונים? ומה סכום הזוויות הפנימיות שלו?

<u>פתרונות והערות</u>

א. דרך אחת למצוא את סכום הזוויות הפנימיות של משובע היא לחלק אותו לחמישה משולשים, בכל משולש הסכום הוא $180°$, ומכיוון שסכום זוויות של כל המשולשים שווה בדיוק לסכום הזוויות של המשובע, הסכום הכולל הוא $900°$.



דרך אחרת היא לבחור נקודה בתוך המשובע (למשל הנקודה H באיור) ולחבר אותה על ידי קטעים לכל אחד מקדקודי המשובע. הפעם נוצרים שבע משולשים, אשר סכום זוויותיהם $1260°$. מסכום זה יש לחסר את כל הזוויות שקדקודן H, שסכומם $360°$.



ב. מכל קדקוד של המשובע יוצאים ארבעה אלכסונים - אלכסון לכל קדקוד אחר חוץ משני הקדקודים השכנים (כי אז הקטעים הם צלעות ולא אלכסונים) ומהקדקוד עצמו. על פי מניין יהיו $7 \times 4 = 28$ אלכסונים, אבל על פי מניין זה, כל אלכסון נמנה פעמיים - פעם אחת מכל קצה, ולכן מספר האלכסונים הוא 14.

ג. על ידי הכללת כל אחת מהדרכים המפורטות בסעיף א לעיל, סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור בעל n צלעות הוא $180°(n-2)$, ומספר אלכסוניו הוא $\frac{n(n-3)}{2}$.

ד. למשוואה הריבועית $\frac{n(n-3)}{2} = 35$ יש שני פתרונות, הפתרון המתאים לבעיה הוא 10. למצולע בעל 10 צלעות $1440°$.

שאלה 6 (חקר)

נתון מרובע כלשהו ABCD. הנקודות P, Q, R ו- S הם אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו- DA בהתאמה.

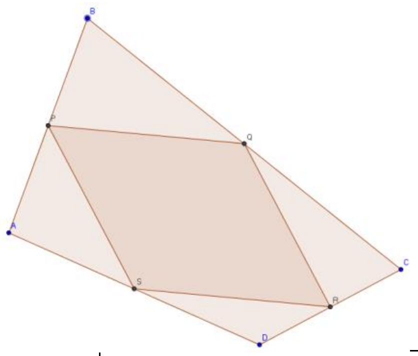
א. הוכיחו כי המרובע PQRS הוא מקבילית.

ב. לגבי כל אחת מהטענות הבאות, ציינו אם היא נכונה או לא. אם הטענה נכונה – הוכיחו אותה. אם היא לא נכונה – שרטטו סקיצה של דוגמה נגדית.

1. אם ABCD טרפז אז PQRS מעוין.
2. אם ABCD מקבילית אז PQRS הוא מקבילית.
3. אם ABCD טרפז שווה שוקיים אז PQRS הוא מעוין.
4. אם ABCD מלבן אז PQRS הוא מלבן.
5. אם ABCD מלבן אז PQRS הוא מעוין.
6. אם ABCD דלתון אז PQRS הוא מעוין.
7. אם ABCD דלתון אז PQRS הוא מלבן.
8. אם ABCD מעוין אז PQRS הוא מלבן.
9. אם ABCD ריבוע אז PQRS הוא מעוין.
10. אם ABCD ריבוע אז PQRS הוא ריבוע.
11. אם PQRS מקבילית אז ABCD הוא מקבילית.
12. אם PQRS מעוין אז ABCD הוא מלבן.
13. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא ריבוע.
14. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מעוין.
15. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מקביליות.

פתרונות והערות

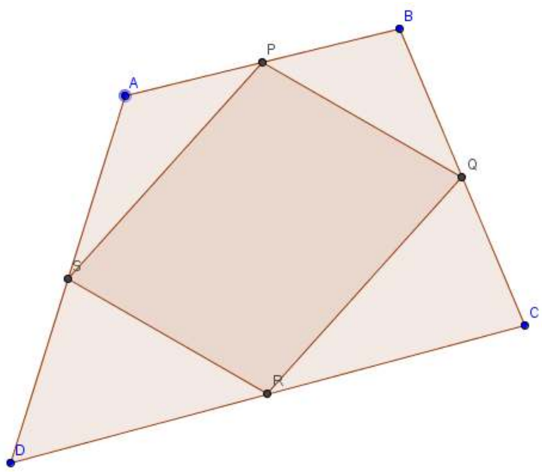
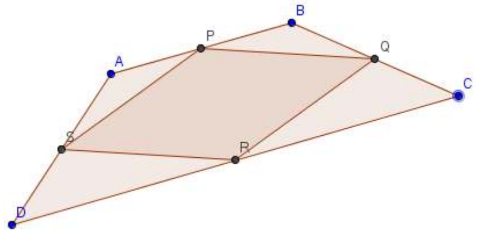
בשאלה זאת על התלמידים לחקור את מרחב האפשרויות כל מנת להכריע אם טענות הן נכונות או לא השאלות מציבות מספר אתגרים: התבססות על משפטים שנלמדו על מנת להוכיח את הטענות הנכונות, הפעלת ביקורתיות ויצירתיות על מנת למצוא דוגמאות נגדיות לטענות הלא נכונות, וזיהוי טענות הסותרות טענות קודמות או לחילופין נובעות מהן.

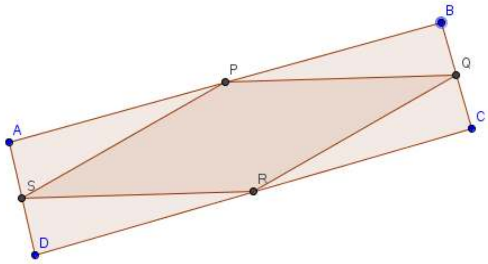
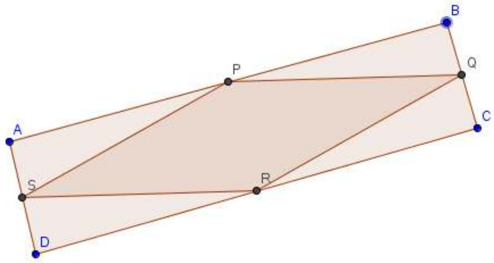
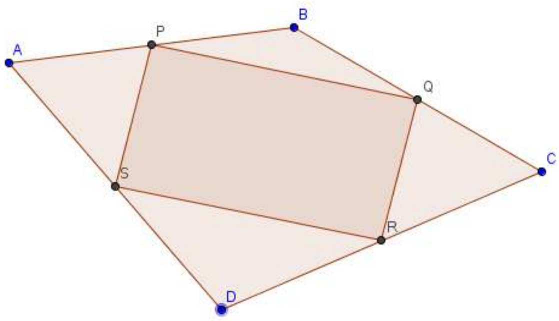


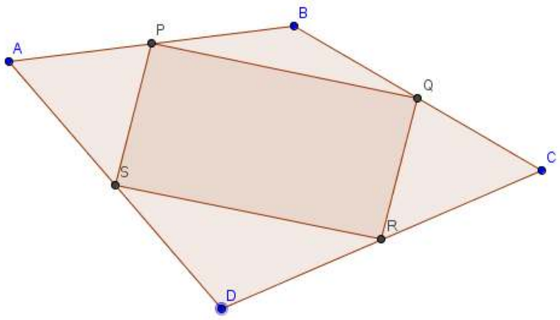
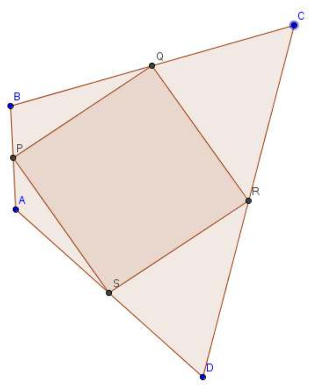
א. אם נעביר את האלכסון BD, נראה ש- SP קטע אמצעים במשולש ABD וש- QR קטע אמצעים במשולש BCD. SP ו- QR מקבילים שניהם ל- BD, ולכן מקבילים זה לזה.

באופן דומה נראה כי PQ ו- RS מקבילים זה לזה, ומכאן שבמרובע PQRS יש שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

ב.

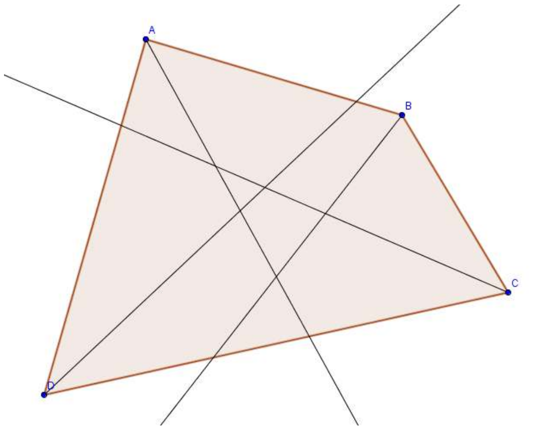
1. אם ABCD טרפז אז PQRS מעוין.	לא נכון. 
2. אם ABCD מקבילית אז PQRS הוא מקבילית.	נכון. בסעיף א הוכחנו ש- PQRS מקבילית בכל מקרה!
3. אם ABCD טרפז שווה שוקיים אז PQRS הוא מעוין.	נכון. קל להראות ש PRCB ו- PRDA טרפזים ישרי זווית חופפים. כמו כן, QS קטע אמצעים בטרפז. נסיק שאלכסוניו של PQRS מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה, ולכן PQRS מעוין. 

4. אם ABCD מלבן אז PQRS הוא מלבן.	לא נכון. 
5. אם ABCD מלבן אז PQRS מעוין.	נכון. קל להראות שאלכסוני PQRS מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה. 
6. אם ABCD דלתון אז PQRS מעוין.	לא נכון. 

7. אם ABCD דלתון אז PQRS מלבן.	נכון. אלכסוני ABCD מאונכים זה לזה, וצלעות PQRS מקבילות לאלכסוני ABCD. 
8. אם ABCD מעוין אז PQRS מלבן.	נכון. מעוין הוא דלתון, כך שהתוצאה נובעת מהסעיף הקודם.
9. אם ABCD ריבוע אז PQRS מעוין.	נכון . ראה סעיף הבא.
10. אם ABCD ריבוע אז PQRS הוא ריבוע.	נכון. אלכסוני PQRS שווים וחוצים זה את זה.
11. אם PQRS מקבילית אז ABCD הוא מקבילית.	לא נכון. הוכחנו בסעיף א ש- PQRS תמיד מקבילית, גם כאשר ABCD מרובע כללי.
12. אם PQRS מעוין אז ABCD הוא מלבן.	לא נכון. נובע מסעיף 15. גם אם PQRS ריבוע, לא נובע אפילו ש- ABCD מקבילית!
13. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא ריבוע.	לא נכון. נובע מסעיף 15. גם אם PQRS ריבוע, לא נובע אפילו ש- ABCD מקבילית!
14. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מעוין.	לא נכון. נובע מסעיף 15. גם אם PQRS ריבוע, לא נובע אפילו ש- ABCD מקבילית!
15. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מקביליות.	לא נכון. 

<u>שאלה 7</u>

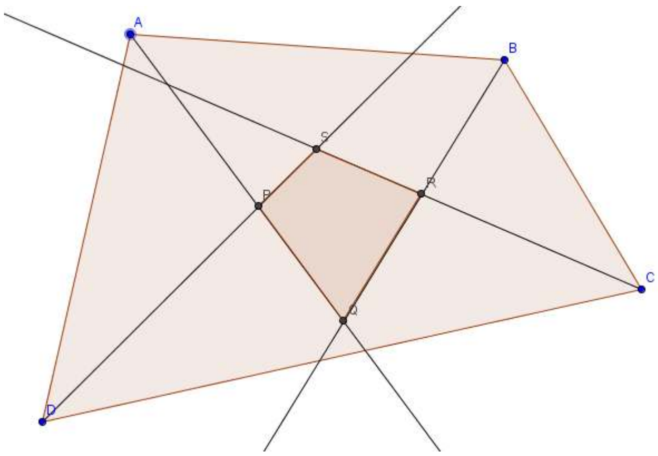
במרובע כלשהו ABCD מעבירים ארבעת חוצי הזוויות, כמתואר בסרטוט.



א. הוכיחו כי אם המרובע ABCD הוא ריבוע, ארבעת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה.

ב. האם קיימים מרובעים (שאינם ריבוע) שבהם ארבעת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה? נסחו טענה והוכיחו אותה.

קיימים מרובעים ABCD כאלה שחוצי הזוויות שלהם יוצרים מרובע PQRS, כמתואר בסרטוט. בהמשך השאלה נמקד את הדיון במרובעים כאלה.



ג. ג. הוכיחו כי אם ABCD מקבילית, הרי ש- PQRS מלבן.

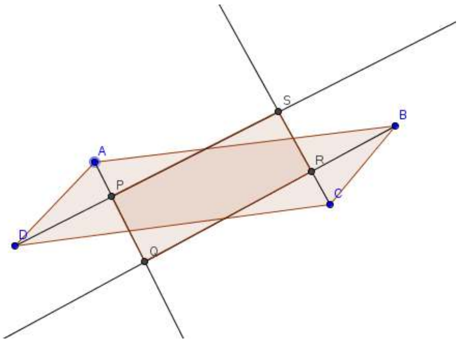
ד. המשפט ההפוך לזה שבסעיף הקודם טוען: אם ידוע ש- PQRS מלבן, ABCD מקבילית. הוכיחו את הטענה או הפריכו אותה בעזרת סרטוט המציג דוגמה נגדית.

ה. נתון כי ABCD מלבן. שרטטו סקיצה ושערו איזה סוג מרובע יהיה PQRS. נסחו השערה ונסו להוכיח אותה.

פתרונות והערות

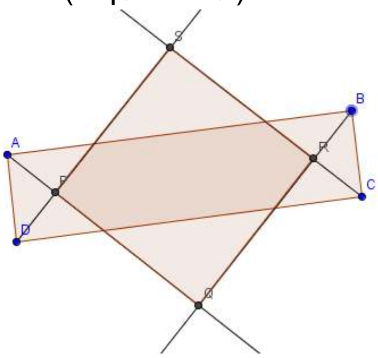
א, ב. במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות, ולכן ארבעת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת – מפגש האלכסונים. כיוון שריבוע הוא מעוין, הרי שגם בריבוע חוצי הזוויות נפגשים בנקודה. גם בדלתון כלשהו חוצי הזוויות נפגשים בנקודה. האלכסון הראשי חוצה שתי זוויות נגדיות, ומשיקולי סימטריה שני חוצי הזוויות הנותרים חותכים את האלכסון הראשי באותה נקודה.

ג. נבחר זווית כלשהי במרובע PQRS (למשל S) ונראה שהיא ישרה. במקבילית, סכום זוויות סמוכות (זוויות BCD ו- ADC) הוא 180°. סכום מחצית הזוויות (SCD ו- SDC) הוא 90°, ולכן משולש SCD הוא ישר זווית, כלומר זווית S היא ישרה. שיקולים סימטריים מראים שגם זוויות P, Q ו- R הן ישרות.



ד. המשפט ההפוך נכון: אם S זווית ישרה, זוויות SCD ו- SDC משלימות לזווית ישרה, זוויות BCD ו- ADC משלימות ל- 180°. זוויות אלה הן חד צדדיות בין AD ו- BC, ולכן צלעות אלה מקבילות. שיקולים סימטריים מראים שגם AB ו- CD מקבילות.

ה. אם ABCD הוא מלבן, PQRS הוא ריבוע. הוכחה: משולש SCD הוא ישר זווית (על פי סעיף ד) ושווה שוקיים (זוויות הבסיס הן מחצית זווית ישרה). מכאן ש SC ו- SD שוות באורכן. משולשים BCR ו- ADP הם משולשים ישרי זווית שווי שוקיים חופפים, ולכן RC ו- PD שווים באורכם. החסרה של גדלים שווים (RC=PD) מגדלים שווים (SC=SD) מראה שהצלעות SR ו- SP שוות. מקבילית שבה זוג צלעות סמוכות שוות היא ריבוע.



<u>שאלה 8 (בנייה)</u>

א. בנו מרובע בעל שתי צלעות בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ. את הבניה תוכלו לבצע בעזרת סרגל ומחוגה או באמצעות תוכנה (למשל, גיאוגברה). איזה סוג מרובע קבלתם? נמקו.

ב. בנו מרובע אחר בעל אותם אורכי צלעות. איזה סוג מרובע קבלתם עכשיו? נמקו.

ג. האם מרובע בעל שתי צלעות בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ חייב להיות מלבן?

ד. השלימו את הטבלה הבאה. מרובע בעל שתי צלעות בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ:

	חייב להיות	יכול להיות	לא ייתכן	הסבר
ריבוע				
מעוין				
מלבן				
טרפז				
מקבילית				
דלתון				

ה. מה השטח הגדול ביותר שיכול להיות למרובע שאורך שתיים מצלעותיו 3 ס"מ ואורך שתיים מצלעותיו האחרות 5 ס"מ? הוכיחו את תשובתכם.

ו. מהם אורכי האלכסונים במרובע בעל השטח שחישבתם בסעיף הקודם? הבחינו בין שני מקרים.

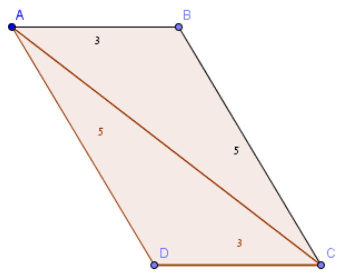
פתרונות והערות

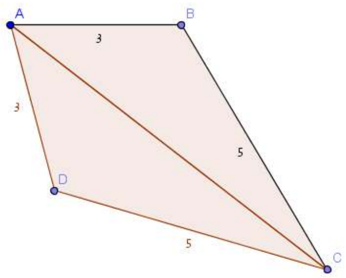
א-ג. מרובע בעל בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ יכול להיות מלבן אך אינו חייב להיות מלבן. המרובע יכול להיות מקבילית או דלתון.

ד.

	חייב להיות	יכול להיות	לא ייתכן	הסבר
ריבוע			√	בריבוע כל הצלעות שוות
מעוין			√	במעוין כל הצלעות שוות
מלבן		√		בנייה
טרפז			√	בטרפז אין שני זוגות של צלעות שוות
מקבילית		√		בנייה
דלתון		√		בנייה

ה. הן דלתון והן מקבילית בעלי אורכי צלעות כאלה מורכבים משני משולשים חופפים שאורכי שתיים מצלעותיהם 3 ס"מ ו- 5 ס"מ.





נימוק: במקבילית, CD=AB ו- DA=BC בתור צלעות נגדיות במקבילית, צלע ACמשותפת. על פי משפט החפיפה צלע-צלע-צלע, המשולשים חופפים. משיקולים דומים, המשולשים הנוצרים על ידי האלכסון AC חופפים. לכן שטח הדלתון או המקבילית יהיו מקסימאליים כאשר שטח המשולשים יהיה מקסימאלי, וזה קורה כאשר הגובה לצלע הינו מרבי, כלומר כאשר הזווית בין הצלעות הנתונות ישרה (בסיס 5 ס"מ וגובה 3

ס"מ או להיפך). בשני המקרים השטח המכסימלי הוא פעמיים שטח המשולש ישר הזווית, כלומר 15 סמ"ר (במקרה זה המקבילית הינה מלבן).

ו. נבחין בין שני המקרים:

במקרה של המלבן האלכסונים שווים, ולפי משפט פיתגורס אורכם $\sqrt{34}$ ס"מ. במקרה של הדלתון אורך אחד האלכסונים $\sqrt{34}$ ס"מ. על מנת לחשב את אורך האלכסון השני נשים לב כי שטח של דלתון הוא חצי מכפלת אלכסוניו. ידוע שהשטח הוא 15 סמ"ר, ומכאן שאורך האלכסון השני $5.145 = \frac{30}{\sqrt{34}}$ ס"מ.

סעיפי השאלה הזאת מחזקים את הקשר בין משפטים ובניות בכך שנכונות ויחידות הבנייה מוכחות באמצעות משפטים.
לא די לשים לב לכך שיתכן מקבילית ויתכן דלתון. יש להדגיש גם את ההכרחיות: המרובע חייב להיות מקבילית או דלתון. יתרה מזאת, אפשר לקבוע בדיוק באיזה תנאי יתקבל דלתון (הצלעות השוות סמוכות זו לזו) ובאיזה תנאי מקבילית (הצלעות השוות נגדיות זו לזו). כדאי לציין אילו דלתונים ומקביליות "מיוחדים" עשויים להתקבל. הדלתון עשוי להיות קמור או קעור, והמקבילית עשויה להיות מלבן.
נציין כאן שאי אפשר לבנות טרפז בעל התכונות הדרושות. לכאורה הדלתון יכול להיות טרפז, אלא שאם יש לו זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות, הרי שמשיקולי סימטריה גם זוג הצלעות השני מקבילות ומתקבלת מקבילית ולא טרפז.

<u>שאלה 9 (בנייה)</u>

א. נסו לבנות את כל המרובעים הבאים כך שאורכי האלכסונים שלהם יהיו 4 ס"מ ו- 7 ס"מ בהתאמה.
הראו אילו מהם ניתן לבנות והוכיחו אילו מהם אי-אפשר.

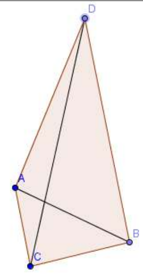
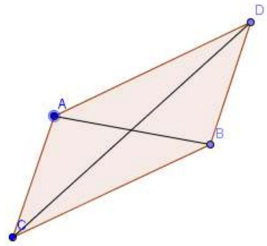
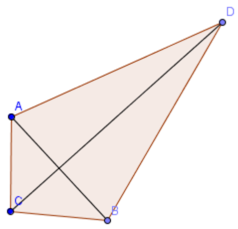
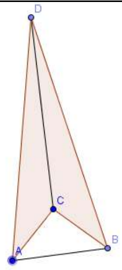
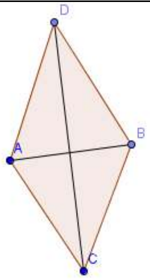
- טרפז שווה שוקיים
- טרפז ישר זווית
- מקבילית
- דלתון קמור
- דלתון קעור
- מעוין
- מלבן
- ריבוע

ב. בנו מרובע (בו אורך אלכסוניו 4 ס"מ ו- 7 ס"מ) כך ששטחו יהיה הקטן ביותר.

ג. מבין כל המרובעים שבניתם בסעיף א, לאיזה מהם יש השטח הגדול ביותר? מה שטחו? נמקו.

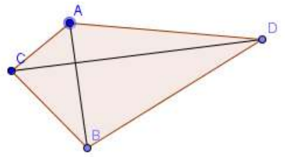
<u>פתרונות והערות</u>

א. איתן לבנות את כל המרובעים המוזכרים להוציא טרפז שווה שוקיים וממלבן (שכולל גם ריבוע).
במרובעים אלה האלכסונים צריכים להיות שווים. לדוגמא:

טרפז ישר זווית	מקבילית	דלתון קמור	דלתון קעור	מעוין
				

ב. שטח של מרובע בעל אורכי אלכסונים הנתונים יכול להיות קטן כרצוננו, אם האלכסונים הולכים ומתקרבים לישר אחד.

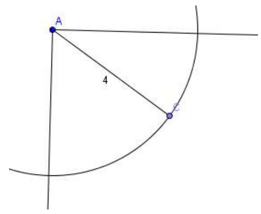
ג. שטח מרובע בעל אורכי אלכסונים נתון הוא מקסימאלי כאשר האלכסונים ניצבים זה לזה. זה קורה בדלתון (ולכן גם במעוין), אבל לא רק, לדוגמה:



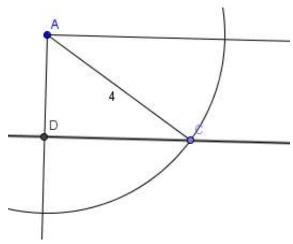
יש לשים לב כי השטח שווה למחצית מכפלת האלכסונים גם כאשר המרובע קעור.

אפשרות אחת "לבניית" מרובע בעל תכונות מסוימות היא לשרטט סקיצה שממחישה שמרובע כזה קיים. אפשרות אחרת היא בנייה מדויקת בעזרת סרגל ומחוגה. אפשרות שלישית היא בנייה בעזרת תוכנת גיאומטריה דינאמית. נדגים כאן בנייה של טרפז ישר זווית בעל אלכסונים בעלי אורך של 4 ו- 7 יחידות בהתאמה, בעזרת גיאוגברה.

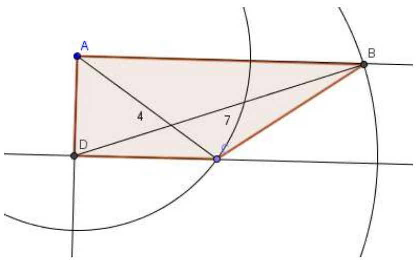
נתחיל בקדקוד של הזווית הישרה (A), ממנו נוציא קרן כלשהי, וקרן שנייה המאונכת לראשונה. ננסה תחילה לבנות את הטרפז כך שהאלכסון דרך הזווית הישרה הוא האלכסון שאורכו 4 יחידות אורך. נעביר קשת מתאימה כמסומן, ונבחר את קודקוד C כך שאורך האלכסון AC יהיה 4 יחידות אורך.



כעת נעביר דרך C ישר המקביל לקרן, על מנת למצוא את הקדקוד D.



את הקדקוד B נבנה עזרת "מחוגה" כך שאורך האלכסון BD יהיה 7 יחידות אורך, ונחבר את קודקודי המרובע.



<u>שאלה 10 (בנייה)</u>

א. בנו מרובע שאלכסוניו שווים באורכם ומאונכים זה לזה. אילו תכונות נוספות יש למרובע שבניתם?

ב. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה דלתון? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.

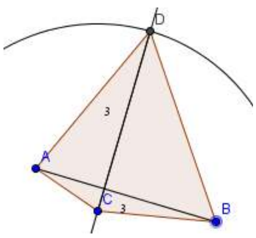
ג. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה מרובע שאיננו דלתון? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.

ד. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה ריבוע? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.

ה. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה מקבילית שאיננה ריבוע? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.

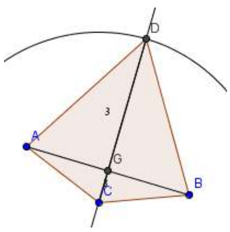
__פתרונות והערות__

א. ניתן לבנות מרובע בו אלכסוניו שווים ומאונכים זה לזה כך שלמרובע לא תהיינה כל תכונות מיוחדות אחרות. לדוגמא:

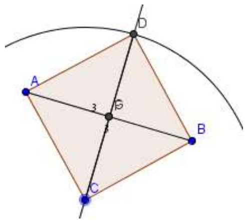


ניתן להדגים את הבנייה על ידי העמדת שני מקלות באורכים הנתונים כך שהם יהיו מאונכים זה לזה ולחבר את הקצוות שלהם. על ידי כך ניתן להיווכח כי קיימים אינסוף מרובעים כאלה שאינם מיוחדים.

ב. אם אלכסון אחד חוצה את האלכסון השני, נקבל דלתונים שונים, למשל:

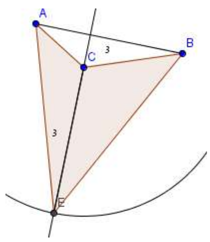


ג. אם שני האלכסונים חוצים זה את זה מתקבל ריבוע:



ד. לא ניתן לקבל מקבילית כללית. במקבילית, אורך האלכסונים אינו בהכרח שווה. המקבילית היחידה שנית לקבל הוא ריבוע.

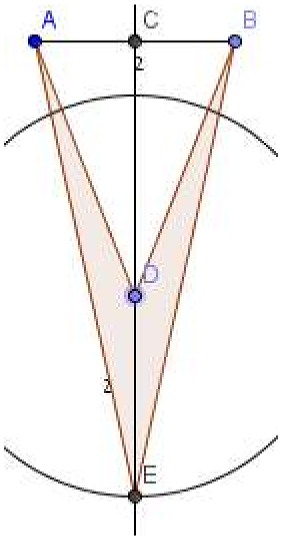
אפשר לציין שהתנאי "אלכסונים מאונכים ושווים" לא מחייב שהם נחתכים. ואכן קיים גם מצב של מרובע קעור שבו אלכסון אחד חיצוני למרובע.



<u>שאלה 11 (בנייה)</u>

בנו דלתון אשר אורכי שני אלכסוניו 2 ס"מ וכל צלעותיו ארוכות מאלכסוניו.

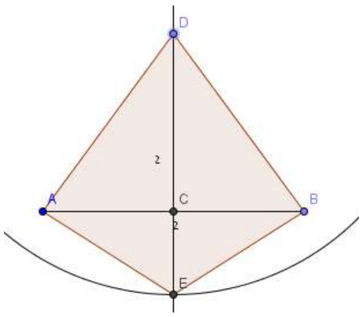
<u>פתרונות והערות</u>



תהליך הבנייה:

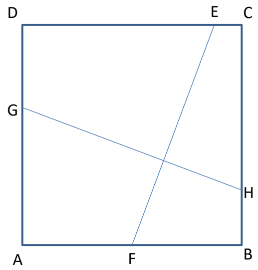
- אלכסון AB שאורכו 2 ס"מ
- אנך אמצעי לאלכסון
- סימון נקודה כלשהי (D) על האנך
- הקצאה של קטע DE באורך 2 ס"מ בעזרת מחוגה.

על מנת שאורכי כל הצלעות יהיו יותר משני ס"מ, יש להרחיק את הנקודה D מהאלכסון AB.
דלתון כזה חייב להיות קעור, כלומר האלכסונים לא נחתכים. אפשר להראות בעזרת משפט פיתגורס שאם הדלתון הוא קמור, תהייה צלע שאורכה $\sqrt{2}$ לכל היותר. בסרטוט CB = 1, CE ≤ 1. אם CE אינו קטן מ- 1 אז CD יהיה קטן מ-1 שהרי סכומם 2. ולכן היתר במשולש CBE (או CBD) הוא לכל היותר $\sqrt{2}$.



<u>שאלה 12 (למתקדמים)</u>

נתון הריבוע ABCD, וידוע כי EF מאונך ל- GH.

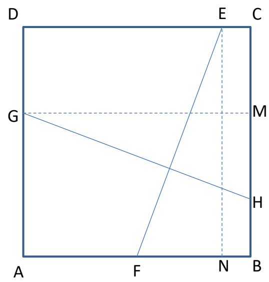


א. הוכיחו כי GH=EF

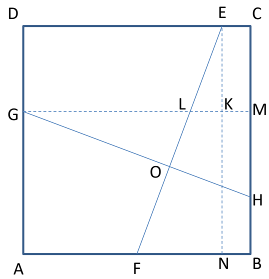
ב. האם תכונה זו תתקיים גם אם נחליף את הריבוע במעוין כללי?

<u>פתרונות והערות</u>

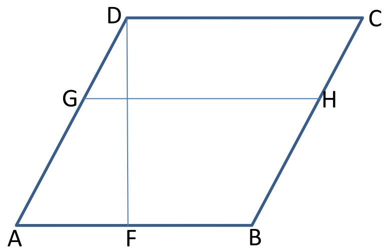
א. אחת הדרכים להראות כי שני קטעים הם שווי אורך היא הוכחת שוויון צלעות מתאימות במשולשים חופפים. לשם כך ניתן ליצור משולשים ש"נראים" חופפים ולבדוק האם הם אכן כאלה. ניצור את המשולשים ישרי זווית ENF ו- GMH:



שני המשולשים הם ישרי זווית, והניצב הגדול בהם שווה (הוא רוך הצלע של הריבוע). אם נצליח להוכיח כי הזווית E שווה לזווית G, המשולשים ENF ו- GMH יהיו חופפים (לפי המשפט זווית-צלע-זווית), ואז GH=EF. נראה כי הזוויות E ו- G שוות בעזרת המשולשים EKL ו- GOL. לשניהם זווית ישרה, והזווית מסומנת ב- L שווה בשני המשולשים (הן קודקודיות), לכן הזווית השלישית חייבת להיות שווה בשניהם.



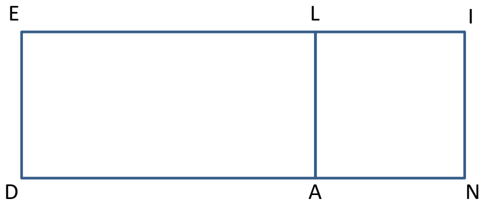
ב. התכונה לא בהכרח תתקיים במעוין. להלן דוגמא נגדית: במעוין ABCD, DF מאונך ל- GH, אך נראה כי GH>DF.



ניתן לראות כי ABHG מקבילית, ולכן GH=AB. אבל מכיוון ש- ABCD מעוין, מתקיים גם כי GH=AB=DA. אבל DA>DF, לכן GH>DF.

שאלה 13

נתון כי ELAD מלבן (שאינו ריבוע) ו- LINA ריבוע.

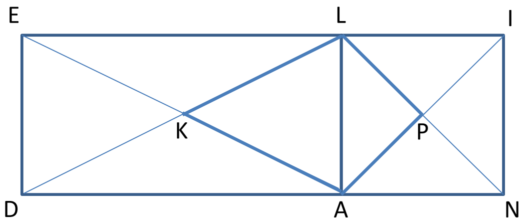


העבירו את אלכסוני המלבן ואת אלכסוני הריבוע וסמנו את נקודות המפגש ב- K וב- P בהתאמה.

א. איזה מרובע הוא LKAP? נמקו.

ב. איזה מרובע הוא DKPN? נמקו.

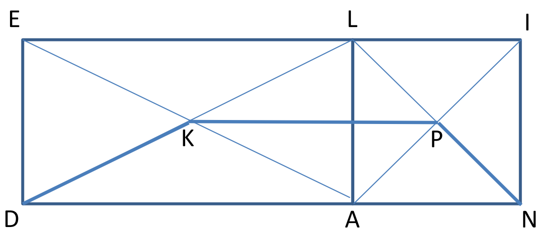
פתרונות והערות



א.

KA=LK (כי במלבן האלכסונים השווים חוצים זה את זה) ו- PA=LP (כנ"ל), לכן LKPA דלתון.

ב.



LA מאונך ל- KP (כי האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה)

LA מאונך ל- DA ולכן ל- DN (צלעות של מלבן)

לכן, KP מקביל ל- DN (כי שני ישרים מאונכים לישר שלישי הם מקבילים זה לזה), ולכן KPDN טרפז.

שאלה 14

להלן שלושה משפטים, הוכיחו את נכונותם או הפריכו אותם (בעזרת דוגמא נגדית).

א. אם מרובע הוא טרפז שווה שוקיים, אז אלכסוניו שווים זה לזה.

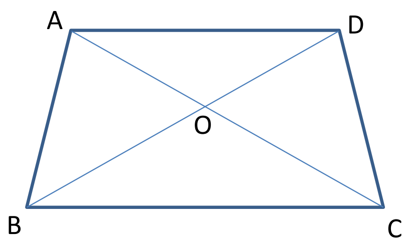
ב. אם במרובע האלכסונים שווים, אז המרובע הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. אם בטרפז האלכסונים שווים זה לזה, אז הטרפז הוא שווה שוקיים.

פתרונות והערות

הסעיפים בשאלה זו מדגימים משפט ושני משפטים הפוכים לו: בראשון נושא המשפט הוא מרובע ובשני נושא המשפט הוא טרפז. כדי לדון על כך עם התלמידים.

א. בטרפז שווה השוקיים הבא



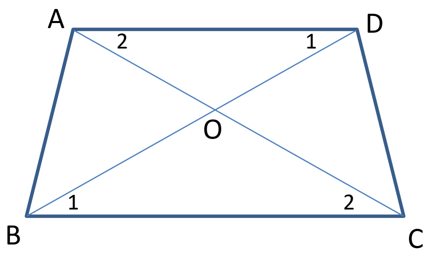
ניתן לראות כי המשולשים ABC ו- BCD חופפים כי AB=CD, זוויות הבסיס שוות (כי הטרפז שווה שוקיים), והצלע BC משותפת. לכן BD=AC.

ב. הטענה לא נכונה. קיימים מרובעים רבים וביניהם מרובעים בלי זוג צלעות מקבילות בהם האלכסונים שווים.

ג. המשפט הוא נכון ולהלן שתי דרכים להוכחתו.

דרך ראשונה:

אם מתמקדים במשולשים DBC ו- ABC בטרפז הבא:

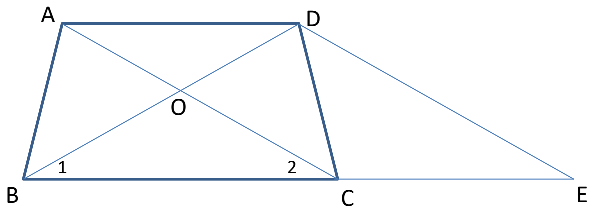


ניתן לראות כי BC היא צלע משותפת וגם AC=DB (נתון). אם נמצא כי הזוויות 1 ו- 2 שוות, נראה כי המשולשים חופפים ולכן AB=CD.

אם הזווית 1 גדולה מהזווית 2, OC>OB וגם OA>OD, לכן OC+OA>OB+OD,   אך אלה ביטויים לשני האלכסונים שאנו יודעים כי הם שווי. סתירה דומה מתקבלת אם נניח כי הזווית 2 גדולה מזווית 1. לכן, זווית 1 ו זווית 2 שוות, ומכאן שהמשולשים חופפים.

דרך שניה:

כמו בדרך הקודמת אנו שואפים להראות כי המשולשים DBC ו- ABC הם חופפים. ידוע כי BC היא צלע משותפת וגם AC=DB (נתון). נראה כי הזוויות 1 ו-2 שוות בדרך אחרת. נבנה קטע DE מקביל ל- AC כך:



ניתן לראות כי ACDE מקבילית, ולכן DE=BD. מכאן שהמשולש BDE הוא שווה שוקיים, והזווית 1 שווה לזווית E. אך זווית E שווה לזווית 2, ומכאן שזוויות 1 ו-2 שוות.

<u>שאלה 15</u>

לכל אחד מהמשפטים (הנכונים) נסחו משפט הפוך. אם המשפט ההפוך נכון, הוכיחו, אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א. נתון מרובע. אם המרובע הוא מעוין, אז אלכסוניו מאונכים זה לזה.

ב. נתונה מקבילית. אם המקבילית היא מעוין, אז אלכסוניה מאונכים זה לזה.

ג. נתון מרובע. אם המרובע הוא מלבן, אז אלכסוניו שווים זה לזה.

<u>פתרונות והערות</u>

כדי לקבל תחושה לגבי נכונות של משפט אם משפט הוא נכון או לא, אפשר לנסות לשרטט את הנתונים (על נייר, בעזרת קווים משורטטים על שקפים או בעזרת תוכנת מחשב). בעקבות ההתנסות תתקבל השערה אותה יש לנסות להוכיח (או להפריך).

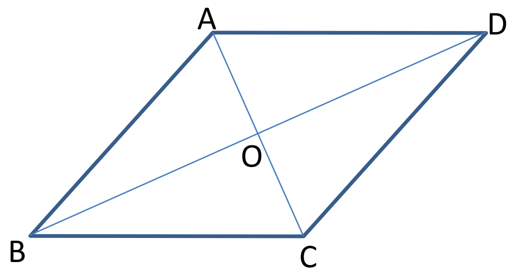
א. אם במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה, אז המרובע הוא מעויין.

המשפט איננו נכון – קיימים מרובעים שונים שאינם מעוינים בהם האלכסונים מאונכים.

ב. אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה, אז המקבילית היא מעוין.

המשפט נכון.

הוכחה:



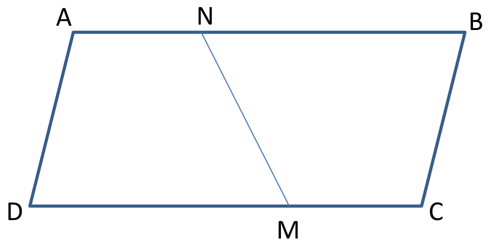
AO=OC (במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה) ו- BO מאונך ל- AC (נתון), לכן המשולש ABC הוא שווה שוקיים (משולש בו התיכון הוא הגובה הוא שווה שוקיים). לכן BC=AB. באופן דומה מראים כי DC=AD. ידוע כי במקבילית צלעות לא סמוכות שוות, לכן AB=CD ומכאן ש- AB=BC=CD=AD, כלומר המקבילית היא מעוין (כל צלעותיה שוות).

ג. אם במרובע האלכסונים שווים זה לזה, המרובע הוא מלבן.

המשפט איננו נכון. ניתן להניח שני עפרונות בעלי אותו אורך כך שישמשו אלכסוני מרובע וליצור מרובע שאיננו מלבן.

שאלה 16

נתונה מקבילית ABCD. אם MC=AN, הראו בשתי דרכים שונות כי הקטע MN חוצה את המקבילית לשני חלקים שווי שטח.

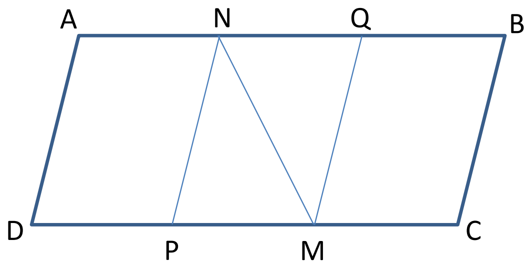


פתרונות והערות

דרך ראשונה: ניתן לחשב את שטחי שני הטרפזיםANMD ו- CMNB בעזרת הנוסחה (ממוצע הבסיסים כפול גובה). הבסיסים הקטנים שווי אורך וגם הבסיסים הגדולים (כל בסיס גדול הוא ה"חיסור" בין הצלע של המקבילית והבסיס הקטן של הטרפזים). הגובה של שני הטרפזים שווה לגובה המקבילית, ולכן שטחי הטרפזים שווים.

דרך שניה: ניתן להראות כי כל הצלעות של טרפז אחד שוות בהתאמה לצלעות של הטרפז השני. כמו כן, ניתן להראות כי כל הזוויות של הטרפז הראשון שוות לזוויות של הטרפז השני בהתאמה. לכן הטרפזים חופפים, ולכן הם בעלי אותו שטח.

דרך שלישית: ניתן להוריד שני קטעים מקבילים ל- AD דרך N ודרך M. על ידי כך נוצרים שתי מקביליות (ADPN ו- QMCB) ושני משולשים (PNM ו- QMN):



ניתן לראות כי המקביליות ADPN ו- QMCB הן שוות שטח (אותו בסיס ואותו גובה) והמשולשים PNM ו- QNM הם שווי שטח (אותו בסיס ואותו גובה). לכן מתקיים כי: QMBC+ QNM=ADPN+PNM, כלומר שטחי הטרפזים שווים.

שאלה 17

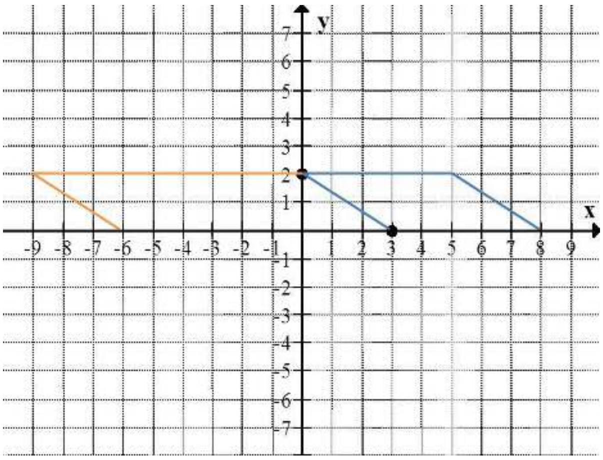
ו. (0,2) ו- (3,0) הם שיעורים של שני קדקודים סמוכים של מקבילית. מצאו שיעורים של עוד שתי נקודות שיכולות להיות שני הקדקודים האחרים. כמה מקביליות שונות אפשר למצוא?

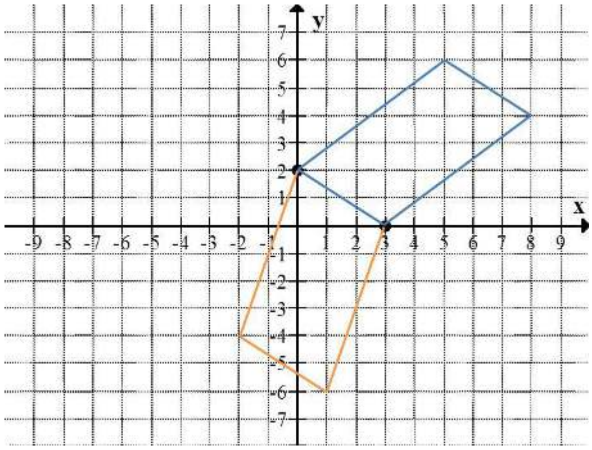
ז. מצאו מקבילית אחת מבין אלה שבניתם אשר שטחה 6 יחידות שטח.

הערות ופתרונות

שאלה זו מיועדת ליישם את התכונות של מקביליות על ידי בנייתם במערכת צירים תוך שילוב הידע על גרפים של פונקציות קוויות.

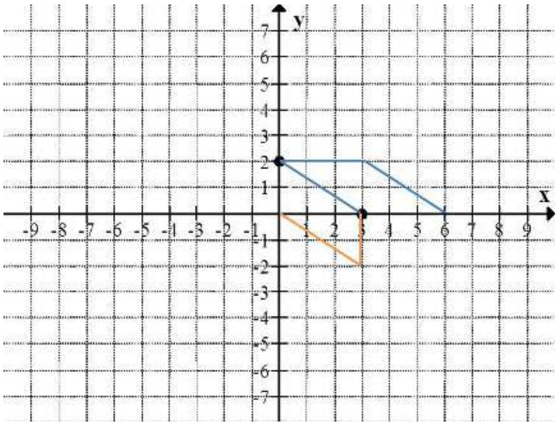
א. להלן אפשרויות שונות ליצירת מקבילית כמבוקש:





רצוי לאסוף תשובות שונות של תלמידים, לבדוק האם אכן הדוגמאות שלהן הן מקביליות ולדון הן על דרך הבנייה (למשל הזזת הקטע המחבר את שתי הנקודות הנתונות במקביל אליו לכל כיוון ולכל מרחק, או לחילופין יצירת קטע בעל אותו אורך ואותו שיפוע באזור כלשהו של מערכת הצירים ולחבר את הקדקודים). מדרכי הבנייה, התלמידים יחושו כי יש אינסוף תשובות אפשריות.

ב. כל מקבילית שבסיסה 3 וגובה 2 ממלאת את התנאי, והן כל מקבילית אשר בסיסה 2 וגובהה 3. למשל:



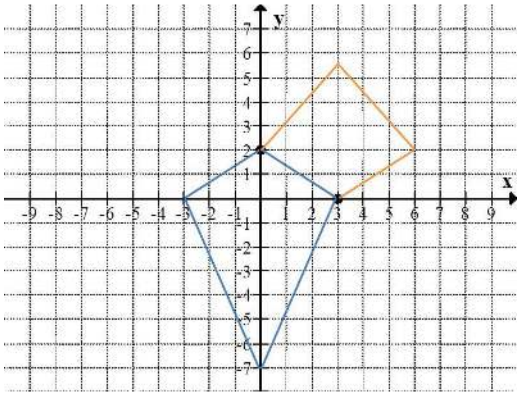
<u>שאלה 18</u>

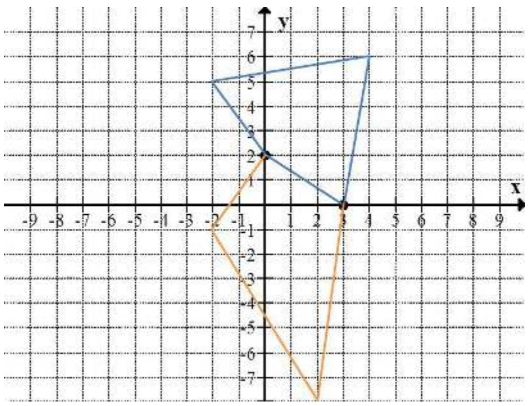
א. (0,2) ו- (3,0) הם שיעורים של שני קדקודים סמוכים של דלתון. מצאו שיעורים של עוד שתי נקודות שיכולות להיות שני הקדקודים האחרים. כמה דלתונים שונים אפשר למצוא? נמקו.

ב. מצאו דלתון אחד מבין אלה שבניתם אשר שטחו 27 יחידות שטח.

<u>פתרונות והערות</u>

א. להלן אפשרויות שונות ליצירת דלתון כמבוקש:



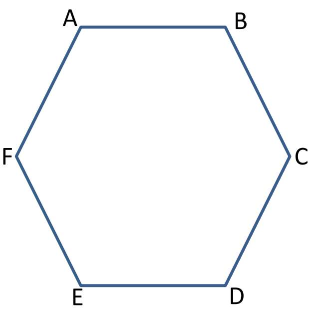


רצוי לדון עם תלמידים על האפשרויות השונות והדרך לבנות אותן. למשל, הקטע הנתון כצלע של הדלתון הוא באורך של יתר של משולש ישר זווית אשר ניצביו הם באורך 2 ו- 3 יחידות. ניתן לבנות קטע כאורך כזה בצמוד לאחד מקודקודי הקטע ולהשלים את הבנייה (למשל על ידי סרטוט האלכסון באורך כלשהו).

ב. ניתן לחשב שטח של דלתון על ידי מחצית מכפלת האורך של אלכסוניו. במקרה זה, נחפש דלתון אשר מכפלת אורך אלכסוניו הוא 54, למשל הדלתון שאיור לעיל אשר קדקודיו הם (0,2), (3,0), (-3,0) ו-(0,-7).

<u>שאלה 19</u>

נתון המשושה המשוכלל ABCDEF (כל צלעותיו שוות זו לזו וכל זוויותיו שוות זו לזו).



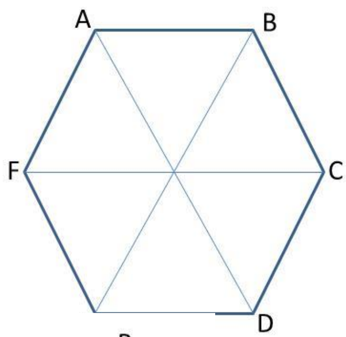
א. חשבו את גודל כל זווית במשושה.

ב. בנו שלשה משולשים כך שקדקודיהם יהיו גם קדקודים של המשושה ואחד מהם יהיה שווה שוקיים, השני ישר זווית והשלישי שונה צלעות. נמקו מדוע לא ניתן לבנות משולש שווה צלעות כזה.

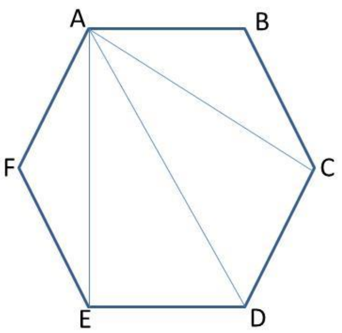
ג. בנו מלבן כך שכל ארבעת קדקודיו הם גם קדקודים של המשושה. הוכיחו כי אכן בניתם מלבן.

ד. בנו דלתון כך שכל ארבעת קדקודיו הם גם קדקודים של המשושה. הוכיחו כי אכן בניתם דלתון.

<u>פתרונות והערות</u>

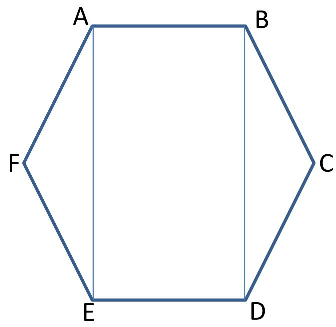


א. ניתן לחשב את גודל הזוויות של מצולע משוכלל בעזרת סכום הזוויות של משולש. אם נחלק את המשושה לששה משולשים:
סכום הזוויות הפנימיות של כל משולש הוא $180°$. כדי לחשב את סכום הזוויות הפנימיות של המשושה, מכפילים $180°\times6=1080°$ ומורידים מסכום זה את סכום הזוויות סביב נקודת המפגש במרכז המשושה ($360°$). כלומר, סכום הזוויות הפנימיות של משושה הוא $1080°-$ $360°=720°$. כיוון שכל הזוויות שוות, כל זווית במשושה היא $720°\div6=120°$.



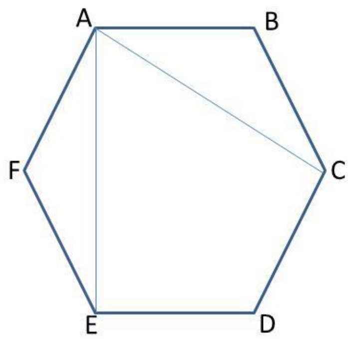
ב. המשולש AFE הוא שווה שוקיים (שתיים מצלעותיו הן שוות כי הן צלעות המשושה המשוכלל). המשולש ADF הוא ישר זווית (ידוע כי AFE שווה שוקיים וזווית ה"ראש" שלו היא $120°$, לכן כל זווית בבסיס היא בת $30°$, לכן הזווית E של המשולש AFE היא $120°-30°=90°$). המשולש ADC הוא שונה צלעות (אחת מצלעותיו הן צלע של המשושה, ושתי האחרות הן אלכסונים באורך שונה של המשושה).

ג.



ED=AB (צלעות של משושה משוכלל), המשולשים AFE ו- BCD חופפים (צ.ז.צ),
כל הזוויות של ABDE ישרות (ראו סעיף קודם). לכן ABDE מלבן.

ד.



AEDC הוא דלתון: DC=ED (נתון) ו- AC=AE (צלעות מתאימות של משולשים חופפים (AFE ו- ABC).

שאלה 20

מצאו את שיעורי הקדקודים של המרובעים הבאים אשר מונחים על מערכת צירים.

א. ריבוע שאלכסוניו הם על צירי המספרים ושטחו 32 יחידות.

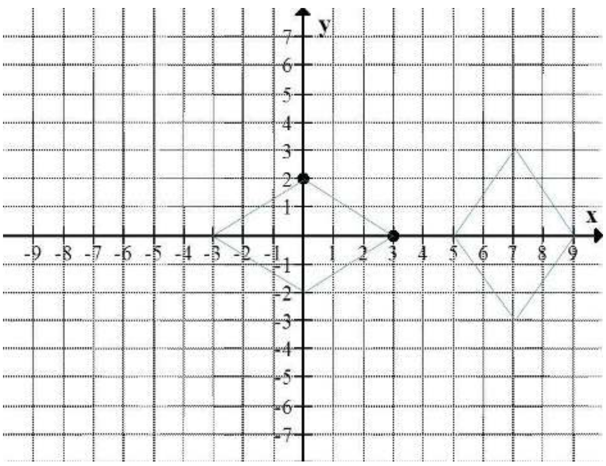
ב. מעוין אשר אלכסון אחד שלו נמצא על ציר ה- x, סכום אורכי אלכסוניו 14 יחידות אורך, ושטחו 12 יחידות שטח.

ג. טרפז אשר אחד מקדקודיו הוא בראשית הצירים, ושטחו 36 יחידות שטח.

תוצאות והערות

א. את שטח הריבוע ניתן לחשב על ידי מחצית מכפלת אורך האלכסונים. לכן יש למצוא ריבוע בו מכפלת אורכי האלכסונים היא 64, וכיוון שהאלכסונים שווים, כל אלכסון יהיה באורך 8 יחידות. כיוון שהאלכסונים נחתכים בראשית הצירים, יש רק ריבוע אחד כזה וקדקודיו הם בנקודות (-4,0), (4,0), (0,4), (0,-4). ניתן לבדוק שאכן שטח של ריבוע כזה הוא 32 על יד חישוב של אורך צלע כפול אורך צלע. כיוון שכל צלע היא $\sqrt{32}$, השטח הוא אכן 32.

ב. את שטח המעוין ניתן לחשב על ידי מחצית מכפלת אורך האלכסונים. לכן יש למצוא מעוין בו מכפלת אורכי האלכסונים היא 24. יש אינסוף מספרים שמכפלתם היא 24, נבנה, למשל ,שני מעוינים בהם האלכסון אחד הוא באורך 4, והאלכסון השני הוא באורך 6 ואחד מהם הוא על ציר ה- x.



ג. שטח טרפז מתקבל ממחצית מכפלת סכום הבסיסים בגובה. יש אינסוף טרפזים ששטחם 36 ואחד מקדקודיו הוא בראשית הצירים, למשל, טרפז שקדקודיו הם בנקודות הבאות:
(8,0), (6,6), (2,6), (0,0). בטרפז כזה הגובה הוא 6, אורך הבסיס האחד הוא 4, ואורך הבסיס השני הוא 8, לכן שטחו $36 = \frac{(8+4)\times 6}{2}$.

שאלה 21

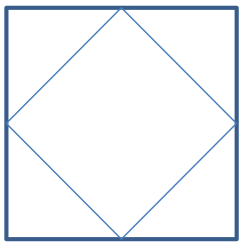
בכל אחד מהמרובעים הבאים חסמו מרובע שקדקודיו הם אמצעי הצלעות של המרובע הנתון. בכל מקרה קבעו את סוג המרובע החסום, וחשבו את שטחו ואת היקפו.

א. ריבוע ששטחו 16 יחידות.

ב. מלבן שאורך צלעותיו 12 ו- 3 יחידות.

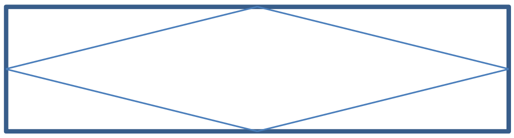
פתרונות והערות

א.



הצורה החסומה היא ריבוע: כל הצלעות שוות (כל אחת היא יתר של ארבעה משולשים ישרי זווית חופפים), וכל הזוויות הן ישרות. שטח הריבוע החסום הוא חצי משטח הריבוע הנתון. ההיקף הוא $8\sqrt{2}$.

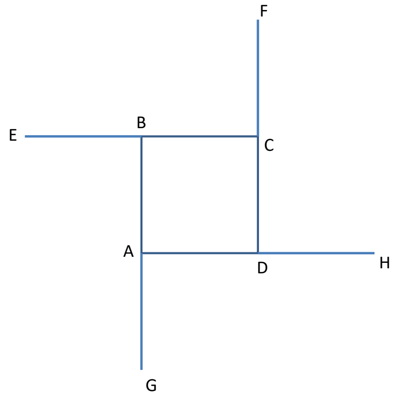
ב.



הצורה החסומה היא מעוין: כל הצלעות שוות (כי כל ארבעת המשולשים בפינות הם חופפים) ושני האלכסונים מאונכים וחוצים זה את זה. גם במקרה זה שטח המעוין החסום הוא חצי של המלבן החוסם. ההיקף הוא $4\sqrt{38.25}$.

<u>שאלה 22</u>

נתון ריבוע ABCD. מאריכים את צלעותיו פי שניים כמו בסרטוט:

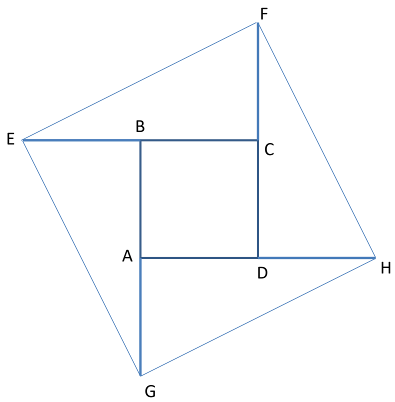


אם מחברים את נקודות EFHG מתקבל מרובע.

א. איזה סוג מרובע הוא המרובע EFHG? נמקו.
ב. פי כמה גדול השטח של EFHG מהשטח של ABCD?

<u>פתרונות והערות</u>

א. מתקבל ריבוע

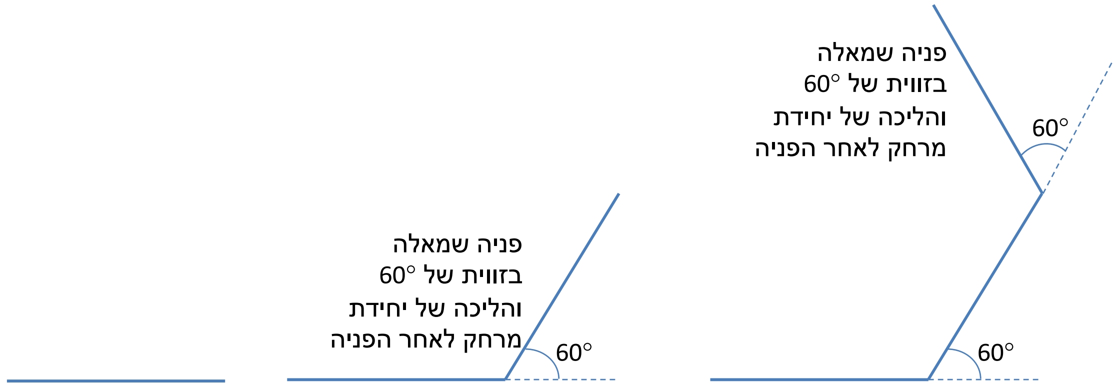


נימוק: הצלעות EF, FH, GH, ו- EG שוות (הן היתר של ארבעה משולשים ישרי זווית חופפים). בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית AGH, ECF,EFG, ו- FDH, הזוויות הצמודות ליתר מסתכמות ל- $90°$. לכן ניתן לראות כי ארבע הזוויות של המרובע EFGH הן ישרות.

ב. אם נסן את צלע הריבוע ABCD ב- a, הניצבים של כל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הם a ו- 2a. לכן, שטח כל משולש הוא כמו השטח של הריבוע ABCD. מכאן, ששטח הריבוע EFGH מורכב מחמישה חלקים שווי שטח, כלומר השטח של EFGH הוא פי חמישה מהשטח של ABCD. ניתן לחשב זאת גם אחרת: לפי משפט פיתגורס, היתר של כל משולש ישר זווית הוא $a\sqrt{5}$, ולכן שטחו הוא $5a^2$.

<u>שאלה 23</u>

נשרטט על החול מצולעים משוכללים באופן הבא: מתחילים מנקודה A ו"הולכים" יחידת מרחק אחת (בקו ישר) ומסמנים על החול. פונים שמאלה בזווית מסוימת, שוב הולכים את אותו המרחק ואחר כך שוב פונים שמאלה באותה זווית. ממשיכים עד שהצורה "נסגרת". הדוגמא מראה (משמאל לימין) את השלבים ליצירת משושה:



א. כאשר יוצרים משושה, כמה פניות יש לבצע כדי להימצא במקום ובכיוון ההתחלתיים?

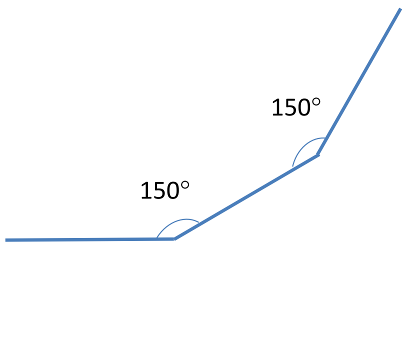
ב. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מחומש משוכלל?

ג. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מתומן משוכלל (מצולע בעל שמונה צלעות)?

ד. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מצולע משוכלל בעל 15 צלעות?

ה. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מצולע משוכלל בעל n צלעות?

ו. איזה מצולע משוכלל ייווצר אם נמשיך את התהליך שבשרטוט:



<u>פתרונות והערות</u>

הקשר השאלה מוביל ליצירת מצולעים בצורה מעשית, ולכן יתכן ותלמידים ינקטו באסטרטגיה של ניסוי וטעיה אשר עשויה להניב מספר תובנות. בשלב מסוים רצוי להוביל את התלמידים לעבודה שיטתית, ולשאול בכל מקרה כיצד ניתן למצוא את הזווית המתאימה בכל מקרה.

א. כדי להימצא במקום ובכיוון ההתחלתיים לאחר יצירת משושה יש לפנות שש פעמים. זאת ניתן לראות מההתנסות עצמה או מהעובדה שההימצאות במקום ובכיוון ההתחלתי מחייב סיבוב של $360°$. אם בסכך הכול יש לפנות $360°$, וכל פנייה היא בת $60°$ אז יש לבצע ששה סיבובים.

ב. $360°÷5=72°$

ג. $360°÷8=45°$

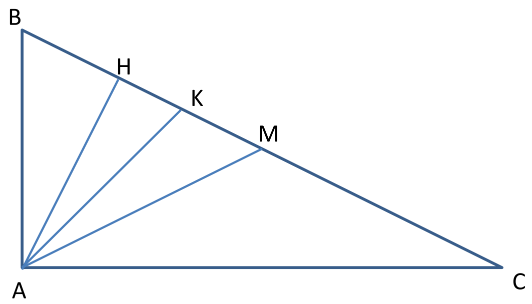
ד. $360°÷15=24°$

ה. $360°÷n$

ו. במקרה זה, לא ניתנת זווית הפנייה, אלא המשלימה שלה ל- $180°$. זווית הפנייה היא $30°$ ולכן יש לפנות 12 פעמים, כלומר נוצר מצולע בן 12 צלעות. ישנה דרך אחרת לגשת לפתרון והיא בעזרת הנוסחה של סכום הזוויות הפנימיות של מצולע: $\frac{180°\times(n-2)}{n} = 150°$ לכן, n=12.

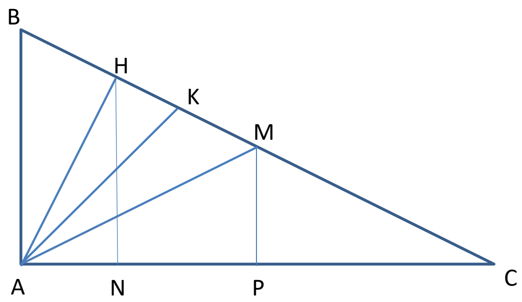
<u>שאלה 24</u>

במשולש ישר הזווית ABC, AH הוא גובה, AK הוא חוצה זווית ו- AM הוא תיכון.



א. הראו כי הזווית MAK ו- KAH שוות.

ב. HN גובה של המשולש AHC. MP גובה של המשולש AMC. הראו כי ABHN ו- NHMP טרפזים.



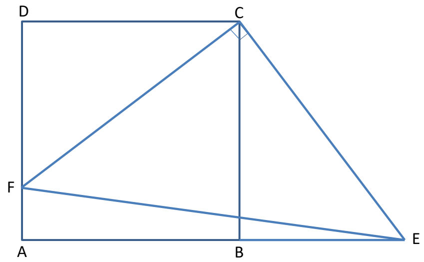
<u>פתרונות והערות</u>

א. כיוון ש- AM תיכון, המשולש AMC הוא שוו שוקיים (מסקנה זו מתבססת על המשפט שאומר כי במשולש ישר זווית התיכון הוא באורך מחצית היתר). לכן זווית MAC שווה לזווית MCA. כיוון ש- KA חוצה זווית, הזווית MAK היא שווה ל- MAC - 45°. מכאן שהזווית MAC חייבת להיות קטנה מ- 45°, אם היא שווה לה המשולש ישר זווית הוא שווה שוקיים (ואז כל שלושת הקווים, תיכון, גובה וחוצה זווית, מתלכדים). הזווית ABC היא BCA -90° ומכאן ש- BCA=BAH. לכן, KAH=90°-2BCA-MAK, ומכאן ש- KAHשווה ל- MAK.

ב. HN ו- MP מאונכים ל- AC, לכן הם מקבילים זה לזה, ולכן NHMP טרפז. באופן דומה רואים כי ABHN טרפז.

שאלה 25

שטח הריבוע ABCD הוא 256 יחידות שטח. הנקודה E המצאת על המשך הצלע AB. שטח המשולש ישר הזווית CEF הוא 200 יחידות שטח.



א. הוכיחו כי CE=CF.

ב. חשבו את אורך הקטע BE.

ג. חשבו את שטח הטרפז ADCE.

ד. חשבו את היקף המשולש FCE.

פתרונות והערות

א. תחילה נראה כי המשולשים FDC ו- BCE חופפים. הצלע DC שווה לצלע CB (שתיהן צלעות של הריבוע הנתון), לשני המשולשים זווית ישרה (צמודה לצלע השווה), והזוויות DCF ו- BCE (אף הן צמודות לצלע השווה מצה השני) שוות כי שתיהן משלימות את FCB ל- 90°. לכן, על פי משפט החפיפה ז.צ.ז. המשולשים FDC ו- BCE חופפים. אם המשולשים חופפים, אז הקטעים CE ו- CF שווים באורכם.

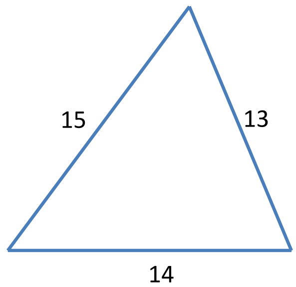
ב. לפי הסעיף הקודם, המשולש FCE הוא לא רק ישר זווית אלא גם שווה שוקיים. לכן ניתן לחשב את שטחו כך: $\frac{1}{2}(CE)^2$. שטח זה הוא 200 יחידות שטח, לכן $(CE)^2 = 400$. לפי משפט פיתגורס, במשולש CBE, מתקבל כי $(CE)^2 = (CB)^2 + (BE)^2$. כלומר, $400 = 256 + (BE)^2$, ומכאן שאורך BE הוא 12 יחידות אורך.

ג. $\frac{16+12}{2} \times 16 = 224$

ד. $CE = 20$, $CF = 20$, $FE = \sqrt{20^2 + 20^2}$

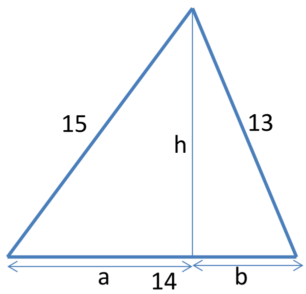
<u>שאלה 26</u>

חשבו את שטח המשולש הבא:



<u>תוצאות והערות</u>

התלמידים לא למדו כיצד לחשב שטח של משולש כלשהו כאשר נתונים רק אורכי צלעותיו, כמו בשאלה זו. אך יש בידיהם כלים לחשב אותו. אם נחלק את המשולש לשני משולשים ישרי זווית, נוכל בעזרת משפט פיתגורס למצוא את גובה המשולש, למשל כך:



בעזרת משפט פיתגורס, מתקבל כי $13^2 = h^2 + b^2$ וגם $15^2 = h^2 + a^2$. על ידי חיסור המשוואה הראשונה מהשנייה, מתקבל כי $15^2 - 13^2 = a^2 - b^2$, כלומר, $(a-b)(a+b) = 56$. אך ידוע כי $a + b = 14$, לכן $a - b = 4$. משתי המשוואות, ניתן למצוא כי $a = 9$ ו- $b = 5$. בעזרת ערכים אלה ניתן לגלות את הערך של h על ידי יישום משפט פיתגורס על אחד משני המשולשים ישרי הזווית, ולמצוא כי h=12. אם כך שטח המשולש הוא $84 = \frac{14\times12}{2}$.

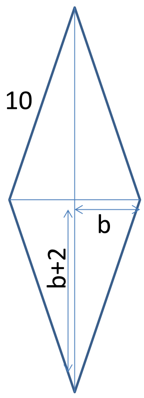
יש לציין כי גם אם מורידים גובה לצלע אחרת תהליך הפתרון היה דומה, אך עם מספרים עשרוניים.

בכיתות מתקדמות ניתן להתבסס על תרגיל זה ולפתח את נוסחת הרון (Heron) לחישוב שטח משולש בהינתן שלוש צלעותיו. נוסחה זו היא $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, בה A מציין את השטח, s מציין את חצי ההיקף, ו- a, b, c הן צלעות המשולש.

שאלה 27

מצאו את שטחו של מעוין אשר אורך צלעו הוא 10 וההפרש בין אורכי האלכסונים הוא 4.

פתרונות והערות



$$(b+2)^2+b^2=10^2$$

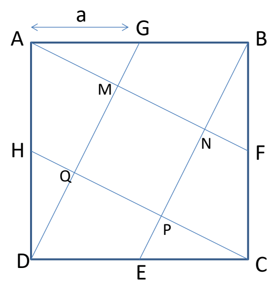
$$2b^2+4b-96=0$$

$$b=6 \qquad b=-8$$

לכן האלכסונים הם באורך 12 ו- 16.

שאלה 28

בריבוע ABCD הנקודות E, F, G, H הן אמצעי הצלעות.



א. הראו כי MNPQ ריבוע.

ב. סמנו AG=a ובטאו את שטח הריבוע MNPQ באמצעות a.

ג. בטאו את היקף הריבוע באמצעות a.

פתרונות והערות

א. ארבעת המשולשים שנוצרו (AMG, BNF, EPC, HQD) הם חופפים (על פע משפט החפיפה ז.צ.ז). מזה נובע, למשל כי EP=GM ו- BN=DQ, ומכיוון ש BE=DG, אז NP=MQ. באופן דומה ניתן להראות כי שער צלעות MNPQ שווה זו לזו. כמו כן, ארבע הזווית של הצורה המרכזית הן ישרות כי הן נוצרות מקווים מאונכים (דרך אפשרית להראות כי הקווים מאונכים היא לדמיין מערכת צירים עם ראשית הצירים בנקודה D ולבדוק ששיפועיהם הם מנוגדים בכיוון והופכיים בערכם המספרי). כיוון שכל הצלעות שווה וכל הזוויות ישרות MNPQ הוא ריבוע.

ב. המשולשים EBC ו- EPC דומים. לכן: $\frac{BE}{EC}=\frac{BC}{PC}$, כלומר $\frac{a\sqrt{5}}{a}=\frac{2a}{PC}$, ולכן $PC=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, כעת מחשבים EP בעזרת משפט פיתגורס במשולש EPC, ומקבלים $EP=\frac{a\sqrt{5}}{5}$

כיוון ש- BC=BN ניתן לחשב את צלע הריבוע MNPQ על ידי החיסור PN=BE-BN-PE, ומתקבל כי אורך הצלע הוא $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. לכן, שטח הריבוע הוא $\frac{4a^2}{5}$, כלומר חמישית משטח הריבוע המקורי.

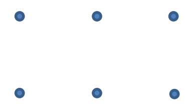
ג. כאשר שטח ריבוע הוא פי n משטח ריבוע אחר, היקפו הוא פי $\sqrt{n}$. במקרה שלנו היקף הריבוע ABCD יהיה **גדול** פי $\sqrt{5}$ מהיקף הריבוע MNPQ. כיוון שהיקף ABCD הוא $8a$, היקף הריבוע MNPQ הוא $\frac{8a}{\sqrt{5}}$.

חזרה לתוכן העניינים

הסתברות

<u>שאלה 1</u>

הנקודות שבאיור מסודרות במערך מלבני כך שהמרחק האנכי והמרחק האופקי של כל נקודה משכנתה הוא יחידה אחת.



א. מצאו את כל המרחקים האפשריים בין כל שתי נקודות שונות (מרחק = אורך הקטע הישר המחבר ביניהן).

ב. מה ההסתברות לבחור באופן אקראי שתי נקודות כך שהמרחק ביניהם הוא 1?

ג. מה ההסתברות שהמרחק בין שתי נקודות שנבחרות באקראי יהיה 2.5?

ד. אם ידוע כי אחת הנקודות שבחרנו היא הימנית העליונה, מה היא הסתברות שהנקודה השנייה היא במרחק גדול מ-2 ממנה?

ה. אם נבחר שלוש נקודות שונות באקראי, מה ההסתברות שנקודות אלה הן קדקודים של משולש ישר זווית?

ו. אם נבחר ארבע נקודות שונות באקראי, מה ההסתברות שהנקודות **אינן** קודקודים של מרובע?

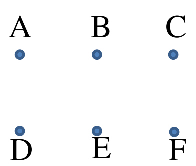
<u>פתרונות והערות</u>

א-ב. מרחב ההסתברות של זוגות (לא סדורים) של נקודות שקול למרחב של קטעים (כי כל קטע קובע ונקבע על ידי זוג של שתי נקודות). להלן אפשרות למנייה שיטתית של הקטעים בין כל שתי נקודות בסידור הנתון: ניתן להתחיל מהנקודה השמאלית העליונה אשר ממנה יוצאים חמישה קטעים, ממשיכים עם נקודה שלידה (התקדמות בכיוון מחוגי השעון) אשר גם ממנה יוצאים חמישה קטעים אך אחד כבר נספר בצעד הקודם. אם ממשיכים כך עבור כל נקודה, מתקבל כי סך כל הקטעים הוא:

$$5+4+3+2+1=15.$$

דרך אחרת היא: מכל נקודה יוצאים חמישה קטעים, ישנן שש נקודות לכן קיימים 30 קטעים, אך כל קטע נספר פעמיים (פעם עבור קצהו האחד ופעם עבור קצהו השני), לכן יש לחלק מספר זה ב-2 , ובסך הכול ישנם 15 קטעים.

על מנת לעקוב אחר הספירה וחישובי ההסתברות, ניתן שמות לנקודות בסידור הנתון:



אורך	קטעים	הסתברות
1	7 AB, AD, BC, BE, CF, DE, EF	$\frac{7}{15}$
$\sqrt{2}$	4 AE, BF, CE, BD	$\frac{4}{15}$
2	2 AC, DF	$\frac{2}{15}$
$\sqrt{5}$	2 AF, CD	$\frac{2}{15}$

ג. בסידור הנתון לא קיימות שתי נקודות הנמצאות במרחק 2.5 זו מזו, ולכן ההסתברות היא אפס.

ד. בהינתן שאחת הנקודות היא הימנית העליונה (C), יש חמש אפשרויות לבחור בנקודה נוספת על מנת ליצור קטע. רק נקודה אחת (D) נמצאת במרחק גדול מ- 2 יחידות ממנה, כך שההסתברות לבחור בה היא $\frac{1}{5}$. ניתן לגשת לשאלה זו גם באמצעות הסתברות מותנית:

$$P\left(\text{מרחק} > 2 \,\middle|\, \text{C הנקודה}\right) = \frac{1/_{15}}{5/_{15}} = 1/5$$

ה. ישנן 20 דרכים לבחור שלוש נקודות, מניין זהיר של המקרים מגלה שמתוכן יש 14 שלשות שיוצרות משולש ישר זווית: 8 משולשים שהניצבים הם באורך יחידה אחת, 4 משולשים בהם הניצבים הם באורך

1 ו- 2, ועוד שני משולשים בהם שני הניצבים הם באורך $\sqrt{2}$. לכן, ההסתברות היא $\frac{14}{20} = 70\%$. ניתן למנות אחרת: מתוך 20 הדרכים לבחור שלוש נקודות יש שתי אפשרויות של נקודות שלא יוצרות משלוש (ABC ו- DEF) ועוד ארבעה משולשים שאינם ישרי זווית (ABF, BCD, DEC ו- AFE), כך שההסתברות של המאורע המשלים למאורע שאנו מחפשים (שלשה של נקודות שאינה יוצרת משולש ישר זווית) היא $\frac{6}{20} = 30\%$.

ו. ישנן 15 דרכים לבחור ארבע נקודות מתוך שש הנקודות שבסידור. המצבים שאינם מאפשרים יצירת מרובע הם אלה בהם שלוש נקודות הן על ישר אחד. יש 6 מצבים כאלה (שלושה עבור הנקודות D, E ו- F, ועוד שלושה עבור הנקודות A, B, ו- C). לכן ההסתברות לכך היא $\frac{6}{15} = 40\%$.

שאלה 2

רן ואלעד משחקים שש-בש בעזרת שתי קוביות וירטואליות המוטלות באמצעות יישומון במחשב. כל ילד בתורו מקבל מהמחשב תוצאה של הטלה וירטואלית - שני מספרים בין 1 ל- 6. כעבור שעתיים של משחק אלעד עוצר את המשחק בטענה שהיישומון לא הוגן כי במשך כל המשחק לא יצא הזוג $(6,6)$ אפילו פעם אחת.

א. אם היישומון הוגן, מה ההסתברות שבהטלה אקראית יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות?

ב. רן ואלעד תכננו ניסוי - להטיל את הקוביות מאה פעמים ולבדוק כמה פעמים יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות. אם היישומון הוגן, בערך בכמה הטלות, מתוך מאה, צפוי להתקבל המספר 6 בשתי הקוביות?

ג. מה ההסתברות שבמאה הטלות של זוג קוביות הוגנות לא יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות אפילו פעם אחת?

ד. אלעד רוצה לשלוח תלונה ליצרן היישומון בטענה שבמאה הטלות קובייה לא התקבל המספר 6 בשתי הקוביות אפילו פעם אחת. האם לדעתכם התלונה מוצדקת? כמה פעמים הייתם מציעים להטיל את הקוביות הווירטואליות כדי לבסס את הטענה שהיישומון לא הוגן? הסבירו את השיקולים שלכם.

פתרונות והערות

הסעיפים השונים בשאלה זו מתייחסים לסוגיות הבאות:

- הקשר בין הסתברות ושכיחות בניסוי חוזר.
- ההסתברות שלא תתקבל ההטלה הרצויה בהטלה בודדת היא גדולה $({}^{35}/_{36})$, אבל מה נקבל אם נעלה מספר זה בחזקת 100? על סמך ידע בשברים, ידוע כי המספר יקטן, אפילו בהרבה, אך מומלץ לחשב כדי לקבל את סדרי הגודל.
- התנסות במתן נימוקים, בביסוס ובניסוח בשפה מתמטית.

א. ${}^{1}/_{6} \times {}^{1}/_{6} = {}^{1}/_{36}$.

ב. $100 \times {}^{1}/_{36} = 2.78$. צפוי להתקבל המספר 6 בשתי הקוביות ביחד בערך 3 פעמים.

ג. ההסתברות שבהטלה בודדת לא יתקבל 6 בשתי הקוביות היא $^{35}/_{36} = 0.972$. ההסתברות שבמאה הטלות לא יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות ביחד היא $(^{35}/_{36})^{100} = 0.0598 \approx 6\%$.

ד. מאורע שמתרחש בהסתברות של 6% איננו מאד נדיר. יצרן היישומון יכול לטעון ש- 6% מהמשתמשים שעורכים את הניסוי (מאה הטלות) ביישומון הוגן צפויים לא לקבל את המספר 6 בשתי הקוביות ביחד אפילו פעם אחת. לתלמידים אין כלים סטטיסטיים לקבוע קשר בין רמת וודאות לבין מספר הטלות.
תשובה אפשרית יכולה להיות: אם נטיל חמש מאות פעם והתוצאה לא התקבלה אפילו פעם אחת, אז כנראה היישומון לא הוגן. זאת כיוון שאם היה הוגן, ההסתברות שתוצאה זו לא תתקבל אפילו פעם אחת היא $(^{35}/_{36})^{500} \approx 0.0000008$. הסתברות זאת היא מאד קטנה - פחות ממקרה אחד למיליון. לכן, אם זה המקרה, ניתן לחשוד שהיישומון אינו הוגן.

<u>שאלה 3 (למתקדמים)</u>

דנה, שרון ומיכל צריכות לבחור באקראי שני מספרים שלמים <u>שונים</u> מתוך קבוצת ששת המספרים הטבעיים הרשומים על קוביית משחק רגילה $(1,2,3,4,5,6)$. הן עושות זאת בשלוש דרכים שונות:

- דנה מטילה זוג קוביות הוגנות, ואם מתקבל פעמיים אותו מספר היא מטילה שוב את שתי הקוביות עד שיתקבלו שני מספרים שונים.
- שרון מחליטה שהיא תבחר את המספרים בנפרד. היא מטילה קובייה אחת, ואח"כ מטילה את השנייה עד שיתקבל מספר שונה מזה שהתקבל בקובייה הראשונה.
- מיכל מחליטה שהיא תבחר תחילה את המספר הקטן מבין השניים, ומטילה קובייה אחת. אם מתקבל 6 (שלא יכול להיות המספר הקטן ביותר), היא מטילה שוב עד שיוצא מספר קטן יותר. אח"כ היא בוחרת את המספר הגדול על ידי הטלת הקובייה שוב ושוב, עד שמתקבל מספר גדול יותר מהמספר הראשון שהיא בחרה.

חשבו מה ההסתברות לתוצאות הבאות בשלוש שיטות ההטלה השונות: א) שתיים וחמש, ב) שלוש וארבע, ג) חמש ושש. באילו שתי שיטות ההסתברויות זהות? האם שתי השיטות האלה שקולות, כלומר, שההסתברות **<u>לכל</u>** תוצאה בשיטה אחת שווה להסתברות לאותה תוצאה בשיטה האחרת? אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הוכיחו.

<u>פתרונות והערות</u>

שאלה זו ממחישה סוגיה שלא תמיד זוכה לתשומת לב בהוראת הנושא. כאשר תוצאה נבחרת "באקראי", לא ברור האם כל שיטות הבחירה שקולות. בדרך כלל כל הדרכים ה"סבירות" לבצע בחירה אקראית הן שקולות. אך בדוגמא של שאלה זו זה לא המקרה.

בשיטה של דנה יש 30 תוצאות שוות הסתברות (כל 36 האפשרויות פחות ששת המקרים לתוצאה זהה בשתי הקוביות). כל תוצאה יכולה להתקבל בשני אופנים, ולכן ההסתברות לכל אחת משלושת התוצאות שבשאלה היא $0.0667 = {}^{1}\!/_{15} = {}^{2}\!/_{30}$.

שרון בוחרת את המספרים אחד אחרי השני, ולכן לכאורה צריך להפריד בין שתי אפשרויות. למשל, במקרה של התוצאה חמש ושש ההסתברות שיתקבל תחילה 5 ואח"כ 6 היא ${}^{1}\!/_{30} = {}^{1}\!/_{5} \times {}^{1}\!/_{6}$. ההסתברות

שיתקבל תחילה 6 ואח"כ 5 היא גם $1/6 \times 1/5 = 1/30$, ולכן, ההסתברות לחמש ושש היא: $2/30 =$ $1/15 = 0.0667$. השיקול זהה עבור שתי התוצאות האחרות (שלוש וארבע, ושתיים וחמש).

בשיטה של מיכל ההסתברויות שונות. התוצאה חמש ושש מתקבלת רק אם המספר הראשון היה 5 והשני 6 (כי המספר השני בהכרח גדול יותר). ההסתברות למספר ראשון 5 היא $1/5$, כי כל התוצאות שוות הסתברות, למעט התוצאה 6 שההסתברות לה היא 0. בהינתן שהמספר הראשון הוא 5, השני חייב להיות 6, כי ממשיכים להטיל את הקובייה עד שיוצא מספר גדול מ- 5. לכן ההסתברות לחמש ושש היא $1/5 \times 1 = 1/5 = 0.2$. באופן דומה, ההסתברות לתוצאה שלוש וארבע היא $1/5 \times 1/3 = 1/15 =$ 0.0667 (כמו בשיטות של דנה ושל שרון). זאת כיוון שההסתברות של המספר הראשון להיות 3 היא $1/5$, ובהינתן שהמספר הראשון היה 3, ההסתברות של השני להיות 4 היא $1/3$, כיוון שרק שלושה מספרים באים בחשבון - אלה שגדולים מ- 3. ההסתברות לתוצאה שתיים וחמש היא $1/5 \times 1/4 = 1/20 = 0.05$. זאת כיוון שההסתברות של המספר הראשון להיות 2 היא $1/5$, ובהינתן שהמספר הראשון היה 2, ההסתברות של השני להיות 5 היא $1/4$, כיוון שרק ארבעה מספרים באים בחשבון - אלה שגדולים מ- 2.

השיטות של שרון ודנה שקולות. את זאת ניתן להסביר כך: בשתי השיטות יש אותן שלושים התוצאות האפשריות שהן שוות הסתברות. אך, בסעיף הקודם ראינו שהשיטה של מיכל שונה מהותית.

שאלה 4 (למתקדמים)

בשנות השבעים של המאה העשרים, ילדים שיחקו בהפסקות במשחק הימורים "שבע פי שלושה", על פי הכללים הבאים: לוח קרטון מחולק לשלושה אזורים המסומנים "קטן מ- 7", "גדול מ- 7", "בדיוק 7". שחקן מהמר מול "בנק". המהמר מניח מספר כלשהו של גוגואים על אחד האזורים, וזורק שתי קוביות משחק רגילות.

- אם הניח באזור "קטן מ- 7" ויצא צירוף קוביות שסכומם קטן מ- 7, הוא מקבל חזרה את הגוגואים שלו ובנוסף אותו מספר גוגואים מהבנק. אם לא יצא קטן מ- 7 הוא מפסיד את הגוגואים שהניח.
- אם הניח באזור "גדול מ- 7" ויצא צירוף קוביות שסכומם גדול מ- 7, הוא מקבל חזרה את הגוגואים שלו ובנוסף אותו מספר גוגואים מהבנק. אם לא יצא גדול מ- 7 הוא מפסיד את הגוגואים.
- אם הניח באזור "בדיוק 7" ויצא צירוף קוביות שסכומם 7, הוא מקבל חזרה את הגוגואים שלו ובנוסף כמות גוגואים שהיא פי שלושה מאלה שהניח. אם לא יצא 7 הוא מפסיד את הגוגואים.

א. מה ההסתברות לזכות אם מהמרים על "קטן מ- 7"? האם לדעתכם כדאי להניח 10 גוגואים על אזור זה של הלוח?

ב. מה ההסתברות לזכות אם מהמרים על "גדול מ- 7"? כמה גוגואים הייתם מהמרים על אזור זה של הלוח?

ג. מה ההסתברות לזכות אם מהמרים על "בדיוק 7"? האם, לדעתכם, כדאי להמר על אפשרות זו פעם אחת? האם כדאי להמר עליה 100 פעמים?

ד. שמעון שם לב שאחרי שחבריו למדו הסתברות, הם הפסיקו להמר על "בדיוק 7". הוא הכריז על משחק חדש "7 פי 7", שבו אם הנחת מספר גוגואים על "בדיוק 7" וכך יצא, זכית בפי 7 גוגואים מהמספר הגוגואים שהנחת. מה דעתכם על משחק זה? האם הייתם מהמרים על "בדיוק 7" פעם אחת? 100 פעמים?

פתרונות והערות

שאלה זו מתמקדת באופן עקיף ברעיון של "תוחלת". בסעיפים א' ו- ב' המצב יחסית פשוט. גודל הזכייה האפשרית שווה לגודל ההפסד האפשרי, ואפשר לטעון שכדאי להמר אם ההסתברות לזכות גדולה מ- $1/2$, ולא כדאי אם ההסתברות קטנה מ- $1/2$. במושגים מתקדמים יותר, נאמר שתוחלת הזכייה חיובית אם ההסתברות לזכות גדולה מ- $1/2$.

בסעיפים ג' ו- ד' המצב יותר מורכב. הסיכוי לזכות ב- "בדיוק 7" הוא קטן ($1/6$). יהיו אולי תלמידים שיטענו שבכזה מצב לא כדאי להמר. בסעיף ג' תוחלת הזכייה היא שלילית ובסעיף ד' חיובית (הזכייה הגדולה מפצה על הסיכוי הקטן), אבל התלמידים אינם מכירים את המושג תוחלת, וגם אם כן מכירים, יתכן ושיקולים של הימנעות מסיכון חזקים יותר משיקולים מתמטיים של תוחלת. השאלה "האם הייתם מהמרים מאה פעמים" היא דרך לא פורמאלית להעלות שיקולים של תוחלת. אם נהמר מאה פעמים נצפה לזכות כשישית מהפעמים. אם הזכייה גדולה פי ששה מההפסד, יש לשער שלא נרוויח יותר מדי ולא נפסיד יותר מדי. אם הזכייה היא רק פי שלושה מההפסד (סעיף ג'), יש לצפות שנפסיד לאורך זמן, ואם הזכייה היא פי שבעה מההפסד (סעיף ד'), יש לשער שנצא מורווחים לאורך זמן.

א. ב- 15 מבין 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות סכום הקוביות הוא קטן מ- 7, ולכן ההסתברות לזכות היא $15/36 \approx 0.42$. כאשר מהמרים על "קטן מ- 7" גודל הזכייה (אם זוכים) שווה בדיוק לגודל ההפסד (אם מפסידים). המשחק הוא לרעת המהמר, ואם המטרה היא לזכות לאורך זמן בגוגואים, לא כדאי להמר על אפשרות זו.

ב. גם במקרה זה יש אותה ההסתברות לזכות, כי באופן סימטרי יש 15 צירופי קוביות שסכומן גדול מ- 7. גם כאן לא כדאי להמר אם המטרה היא לזכות לאורך זמן.

ג. ב- 6 מתוך 36 הטלות אפשריות, סכום הקוביות שווה ל- 7, ולכן ההסתברות לכך היא $1/6$. אמנם הזכייה גדולה פי שלושה מההפסד, אבל זה לא מפצה על סיכוי הזכייה הנמוך. רווח של "פי ששה" היה מפצה על הסיכון.

ד. המשחק של שמעון הוא לרעת הבנק, כי הסיכוי שייצא 7 הוא $1/6$, ולכן לאורך זמן צפוי שהמהמרים על "בדיוק 7" יזכו כ- $1/6$ מהפעמים. אם בכל פעם ירוויחו פי שבעה ממה שהימרו, לאורך זמן יזכו ביותר גוגואים מאשר המספר של גוגואים שיפסידו.

שאלה 5

במסגרת פרויקט מנהיגות עליכם לראיין מועמד למנכ"ל של חברה. להלן תעתיק הראיון:

מראיין: כמה ילדים יש לך?

מרואיין: 2.

א. מה ההסתברות שיש למרואיין שני בנים?

ב. מה ההסתברות שיש למרואיין שתי בנות?

ג. מה ההסתברות שיש למרואיין בת אחת ובן אחד?

ד. מה ההסתברות שהצעיר/ה מבין ילדי המועמד הוא בן?

ה. מה ההסתברות שהמבוגר/ת מבין הילדים בת והצעיר/ה בן?

הראיון ממשיך כך:

מראיין: האם נוכל לשוחח בטלפון עם בת שלך?

מרואיין: כן, למה לא?

לכן מסתבר שלמרואיין יש לפחות בת אחת. ענו שוב על חמש השאלות הקודמות:

ו. מה ההסתברות שיש לו שני בנים?

ז. מה ההסתברות שיש לו שתי בנות?

ח. מה ההסתברות שיש לו בן אחד ובת אחת?

ט. מה ההסתברות שהצעיר/ה מבין ילדי המועמד הוא בן?

י. מה ההסתברות שהמבוגר/ת מבין הילדים בת והצעיר/ה בן?

פתרונות והערות

א. בהנחה שבנים ובנות מתפלגים באופן שווה ובלתי תלוי, במקרה של שני ילדים במשפחה ארבעת המקרים הבאים הם שווי הסתברות: בן-בן, בן-בת, בת-בן, בת-בת. לכן ההסתברות לשני בנים היא $1/4$. יתכן ויהיו תלמידים שיטענו שהתשובה היא $1/3$, כיוון שיראו לנגד עיניהם רק שלוש אפשרויות: שני בנים, שתי בנות, וילד אחד מכל מין. מענה אפשרי לטענה זאת הוא שהאפשרויות אינן שוות הסתברות. "ילד אחד מכל מין" סביר יותר משני בנים, כי יש שני מצבים שונים של "בן ובת" - בן-בת או בת-בן.

ב. ההסתברות שיש למרואיין שתי בנות היא $1/4$ והשיקולים הם זהים לאלה שפורטו בשאלה הקודמת.

ג. $1/2$ (ראו הסבר בסעיף א לעיל).

ד. ניתן להסתכל על שאלה זו בשני אופנים: (א) מין הצעיר מבין השניים בלתי תלוי במין המבוגר, ולכן יש שתי אפשרויות שוות הסתברות; (ב) כאמור יש ארבע אפשרויות שוות הסתברות, ובשתיים מהן הצעיר הוא בן.

ה. סעיף זה מהווה הזדמנות נוספת לעמוד על ההבדל בין "בן ובת" (בלי סדר כלשהו ולכן ההסתברות $1/2$) ו- "המבוגר/ת בת והצעיר/ה בן" (ההסתברות ההסתברות $1/2$). אם כיתות מתקדמות אפשר להדגיש שאין שום דבר שמייחד את ההפרדה של "מבוגר/ת-צעיר/ה". כל תכונה שהיא בלתי תלויה במין הייתה נותנת תוצאה דומה, למשל "הילד/ה עם העניים הבהירות יותר בת והילד/ה עם העניים הכהות יותר בן". תכונות שיש ביניהן קשר למין לא נותנות תוצאה דומה, למשל, אם נניח שבנים הם בממוצע גבוהים יותר מבנות, הרי שההסתברות של "הגבוה/ה מבין השניים בן והנמוכ/ה בת" גדולה יותר מההסתברות של "הגבוה/ה מבין השניים בת והנמוכ/ה בן", ולכן הסתברויות אלה כבר אינן $1/4$.

ו. עם קבלת המידע הנוסף, שלמרואיין יש לפחות בת אחת, נוצר מצב של הסתברות מותנית. את כל ההסתברויות המותנות אפשר לחשב על ידי צמצום מרחב האפשרויות שוות ההסתברות ומניית מקרי ה"הצלחה" מבין כל המקרים. מתוך ארבע האפשרויות שוות ההסתברות המקוריות (בן-בן, בן-בת, בת-בן, בת-בת), המידע החדש (יש לפחות בת אחת) פוסל את האפשרות של בן-בן (ההסתברות שלה היא אפס), ונשארות שלוש אפשרויות שוות הסתברות, וההסתברות לכל אחת מהן היא $1/3$.

ז. $^1/_3$.

ח. $^2/_3$.

ט. $^1/_3$.

י. $^1/_3$.

שאלה 6[12]

יסמין ויואב משחקים במשחק מזל לפי הכללים הבאים: בכל סיבוב מטילים קובייה הוגנת. יסמין מנצחת במשחק כאשר מתקבל 6. יואב לעומת זאת צובר נקודה אחת כל פעם שלא מתקבל 6, וזוכה כאשר הוא צובר חמש נקודות.

א. מה מספר ההטלות הגדול ביותר האפשרי במשחק?

ב. במשחק מסוים, הקובייה הוטלה ארבע פעמים והתקבלו המספרים 2, 1, 3, 1. חשבו את ההסתברויות של יסמין ושל יואב לנצח במשחק זה.

ג. יסמין ויואב החליטו לשחק שוב. מה הסיכוי של כל אחד מהשחקנים לנצח?

ד. מה תהייה תשובתכם לשאלה הקודמת אם יואב צריך לצבור ארבע נקודות? ומה אם הוא צריך לצבור שש נקודות?

ה. הציעו גרסה חדשה של המשחק שתהפוך אותו להוגן עד כמה שאפשר. מה הסיכויים של כל אחד מהשחקנים לנצח במשחק שהצעתם?

פתרונות והערות

א. המשחק יסתיים לאחר חמש הטלות לכל היותר.

ב. במצב המתואר יסמין תנצח אם בהטלה הבאה יתקבל 6 (הסתברות $1/6$), ויואב ינצח בכל מקרה אחר (הסתברות $5/6$).

ג. על מנת שיואב ינצח צריך חמש הטלות רצופות בהן מתקבלים מספרים שונים מ- 6. ההסתברות להטלה אחת כזאת היא $5/6$ ולכן ההסתברות שכל חמש הזטלות הראשונות יהיו כאלה היא $(5/6)^5 \approx$ 0.42. ניתן לחשב את ההסתברות שיסמין תנצח בדרך ישירה או בדרך עקיפה. הדרך הישירה כרוכה בחישוב ארוך: ההסתברות שהיא תנצח בהטלה הראשונה היא $1/6$, ההסתברות שלא תנצח בראשונה

[12] בהשראת התרגיל הפותח בחוברת "פרקי מתמטיקה: הסתברות" – מהדורה ניסויית, מאת נ. הדס, א. הרכבי ורינה מירסקי, הוצאת מכון ויצמן למדע, 1991.

אבל תנצח בשנייה היא $5/6 \times 1/6$, ההסתברות שלא תנצח בשתי ההטלות הראשונות אבל תנצח בשלישית היא $(5/6)^2 \times 1/6$, וכן הלאה עד ההסתברות לנצח בהטלה החמישית. לבסוף, יש לחבר את ההסתברויות של חמשת המאורעות הזרים האלה. הדרך העקיפה לחישוב זה היא כמעט מידית: אם יואב לא מנצח, הרי שיסמין מנצחת (אין במשחק הזה מצב של תיקו), ולכן ההסתברות שיסמין תנצח משלימה ל- 1 את ההסתברות שיואב ינצח, כלומר ההסתברות של יסמין לנצח היא $0.58 = 1 - 0.42$.

ד. אם יואב צריך לצבור רק ארבע נקודות, ההסתברות שינצח היא $(5/6)^4 \approx 0.48$. אם הוא צריך לצבור שש נקודות, ההסתברות שינצח היא $(5/6)^6 \approx 0.33$. כלומר, אם יואב צריך לצבור רק ארבע נקודות, המשחק יותר הוגן אבל עדיין ליסמין יש סיכוי גדול יותר לנצח.

ה. כאן יש מקום ליצירתיות. אם משנים רק את מספר הנקודות שיואב צריך לצבור, הרי ש- ארבע נקודות נותן משחק די הוגן - 48% סיכוי ליואב ו- 52% ליסמין. אם יואב צריך לצבור רק שלוש נקודות, סיכויו לנצח גדלים לכמעט 58%. אפשר להציע שינויים לכללי המשחק כך שיהפכו אותו להוגן. למשל, להתחיל את המשחק בהטלת מטבע שלפיה יוחלט איזה שחקן צובר נקודות ואיזה שחקן מייחל ל- 6, או לחילופין לשחק פעם עם צבירה של ארבע נקודות ופעם אם צבירה של שלוש.

שאלה 7

לסביבון הוגן יש סיכוי שווה לעצור על כל אחד מצדדיו: **נ**, **ג**, **ה**, **פ**. מסובבים את הסביבון פעמיים. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

א. בשתי הפעמים יתקבל **נ**.

ב. בפעם הראשונה יתקבל **נ** ובפעם השנייה **ג**.

ג. באחת הפעמים יתקבל **נ** ובאחת הפעמים **ג**.

ד. תתקבל אותה התוצאה בשתי הפעמים.

ה. תתקבלנה תוצאות שונות בשתי הפעמים.

פתרונות והערות

א. $(1/4)^2 = 0.0625$.

ב. $(1/4)^2 = 0.0625$. תוצאה זו עשויה להפתיע תלמידים אם משווים אותה לתוצאה של הסעיף הקודם.

ג. $2 \times (1/4)^2 = 0.125$. זאת כיוון שיש לקחת בחשבון **נ-ג** וגם **ג-נ**.

ד. $1/4$. אפשר למנות ארבע תוצאות כאלה (**נ-נ**, **ג- ג**, **ה-ה**, **פ-פ**) מתוך שש עשרה אפשרויות שוות הסתברות. טיעון אחר: לא משנה מה מתקבל בפעם הראשונה, ההסתברות שבפעם השנייה יתקבל אותו הדבר היא $1/4$.

ה. דרך אחת לחשב את ההסתברות היא למנות בכמה מתוך שש עשרה התוצאות שוות ההסתברות, הסיבוב השני מניב תוצאה שונה מהראשון. התשובה היא 12 מתוך 16, וההסתברות היא $3/4$. דרך יעילה יותר משתמשת בעקרון ההשלמה. אם ההסתברות להטלות זהות היא $1/4$ (סעיף ד'), ההסתברות להטלות שונות היא $3/4$. שיקול אחר: התוצאה השנייה בלתי תלויה בראשונה. לכל תוצאה ראשונה (**נ/ג/ה/פ**), לתוצאה השנייה יש הסתברות $3/4$ להיות שונה ממנה.

שאלה 8

בכיתה 20 בנות ו- 10 בנים. בוחרים באקראי תלמיד או תלמידה לתפקיד יושב ראש וועד הכיתה ותלמיד או תלמידה למועצת התלמידים.

א. מה ההסתברות שייבחר בן לתפקיד הראשון?

ב. מה ההסתברות שייבחר אותו/ה תלמיד/ה לשני התפקידים?

ג. מה ההסתברות שתיבחר בת לשני התפקידים?

ד. מה ההסתברות שייבחר בן לשני התפקידים?

ה. מה ההסתברות שייבחר בן לתפקיד יושב ראש וועד כיתה ובת למועצת תלמידים?

ו. מה ההסתברות שייבחרו בן אחד ובת אחת.

פתרונות והערות

א. ההסתברות היא השכיחות היחסית של הבנים בכיתה: $1/3$.

ב. ניסוח השאלה לא פוסל אפשרות כזאת, כלומר אנחנו במצב שמכונה לעיתים "עם החזרות". הכוונה היא לתת לתלמידים הזדמנות לעמוד על ההבדל בין "עם/בלי החזרות" במגוון של מצבים. ההסתברות שהגרלה שנייה תניב אותה תוצאה כמו הראשונה היא $1/30$.

ג. $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} \approx 0.444$.

ד. $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} \approx 0.111$.

ה. $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \approx 0.222$.

ו. ההסתברות היא פי שניים ההסתברות בסעיף הקודם, כלומר $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0.444$, כי יש שתי אפשרויות שוות הסתברות: בן-בת או בת-בן. יש לנו הזדמנות לבדוק את עצמנו: המאורעות המתוארים בסעיפים ג, ד, ו הם זרים ומשלימים, לכן שסכום ההסתברויות של שלושתם הוא אחייב להיות 1 (0.999 בגלל טעויות עיגול).

<u>שאלה 9 (המשך לשאלה הקודמת)</u>

(שאלת המשך) הכיתה החליטה לא לאפשר לתלמיד אחד למלא את שני התפקידים, אבל התלבטה כיצד לבצע את הבחירה האקראית.

א. (סעיף אופציונאלי, ניתן לעבור ישר לסעיף הבא) הציעו כיצד כדאי לערוך את ההגרלה כך שתהייה הוגנת, כלומר שלכל תלמיד/ה יהיה אותו סיכוי להיבחר לכל אחד מהתפקידים, אבל לא ייבחר אותו תלמיד/ה לשני התפקידים.

ב. מה ההסתברות שתיבחר בת לשני התפקידים?

ג. מה ההסתברות שייבחר בן לשני התפקידים?

ד. מה ההסתברות שייבחר בן לתפקיד הראשון ובת לתפקיד השני?

ה. מה ההסתברות שייבחר בן לאחד התפקידים ובת לאחד התפקידים?

<u>פתרונות והערות</u>

א. יש כאן מקום ליצירתיות, אבל יש לשים לב שלא כל שיטה שיש בא אקראיות מבטיחה סיכוי שווה לכל התלמידים. שיטה אפשרית: להכין פתק לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה (מי לתפקיד הראשון ומי לתפקיד השני), ולבחור באקראי פתק אחד. יהיו $30 \cdot 29 = 870$ פתקים כאלה. שיטה זאת אינה יעילה. שיטה אחרת היא לערוך הגרלה מבין כל תלמידי הכיתה על תפקיד הראשון (למשל לבחור פתק אחד מתוך 30), ואח"כ להגריל מבין הפתקים הנותרים נציג לתפקיד השני. אפשר לקיים דיון על השאלה כיצד יודעים ששתי השיטות "שקולות".

ב. $\frac{20}{30} \times \frac{19}{29} \approx 0.437$. אנחנו רואים שההסתברות דומה מאד לזו בשאלה "עם החזרות" (0.444), אבל בכל זאת מעט יותר נמוכה, כי אחרי שנבחרה בת לתפקיד אחד, ההסתברות לבחירת בת אחרת (כאשר הראשונה כבר אינה עומדת לבחירה) קטנה מ- $\frac{20}{30}$ ל- $\frac{19}{29}$).

ג. $\frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \approx 0.103$. גם במקרה זה, הדומה למקרה הקודם, ההסתברות מעט יותר קטנה מהמצב של "עם החזרות" (0.111).

ד. $\frac{10}{30} \times \frac{20}{29} \approx 0.230$. גם כאן ההסתברות דומה למצב של "עם החזרות" אבל מעט יותר גדולה. הסיבה: אחרי שנבחר בן לתפקיד אחד, ההסתברות שתיבחר בת לתפקיד השני עולה במקצת ($\frac{20}{29}$ במקום $\frac{20}{30}$).

ה. $2 \times \frac{10}{30} \times \frac{20}{29} \approx 0.460$. גם הפעם ניתן לבדוק כי סכום ההסתברויות בסעיפים ב, ג, ה הוא 1.

שאלה 10

על קוביית משחק מופיע המספר 1 על פאה אחת, 2 על שתי פאות ו- 3 על שלוש פאות.

א. מה ההסתברות שבהטלת קובייה יתקבל המספר 1? המספר 2? המספר 3?

ב. מטילים את הקובייה פעמיים. מה האפשרויות השונות לסכום שתי ההטלות ומה ההסתברויות שלהם?

ג. מה ההסתברות שסכום הקוביות יהיה 4 אם ידוע שההפרש בין שתי הקוביות זוגי?

פתרונות והערות

מטרת שאלה זו היא לתרגל מיצוי של מרחב אפשרויות ומניית תוצאות בסיטואציה פחות מוכרת וצפויה.

א. ההסתברות שבהטלת קובייה יתקבל 1 היא $1/_6$. ההסתברות שיתקבל המספר 2 היא $1/_3 = 2/_6$.
ההסתברות שיתקבל המספר 3 היא $1/_2$. סכום ההסתברויות הוא 1.

ב. הטבלה הבאה מתארת את סכום הקוביות בכל אחת מ- 36 התוצאות האפשריות (שהן שוות ההסתברות) של הטלת שתי קוביות.

	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

את ההסתברויות נמצא על ידי מניית מספר המופעים של כל תוצאה בטבלה.

ההסתברות לסכום 2 היא $\frac{1}{36}$

ההסתברות לסכום 3 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 4 היא $\frac{5}{18} = \frac{10}{36}$

ההסתברות לסכום 5 היא $\frac{1}{3}=\frac{12}{36}$

ההסתברות לסכום 6 היא $\frac{1}{4}=\frac{9}{36}$

ג. תחילה נשים לב שהפרש המספרים שעל שתי הקוביות הוא זוגי באותם המקרים בהם הסכום הקוביות זוגי (שני המספרים זוגיים או שניהם אי-זוגיים). מרחב האפשרויות מצטמצם מ- 36 ל- 20 תוצאות. ב- 10, מתוך 20 התוצאות הזוגיות, סכום הקוביות הוא 4, ולכן ההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 11

בסדרה של קוביות משחק מופיע המספר 1 על שתי פאות, 2 על פאה אחת, 3 על שתי פאות ו- 4 על פאה אחת. מטילים שתי קוביות כאלה.

א. מה האפשרויות השונות לסכום המספרים שמופיעים על שתי הקוביות?

ב. חשבו את ההסתברות לכל אחד מהסכומים האפשריים.

ג. מה ההסתברות שסכום מספרים המופיעים על הקוביות הוא 6, אם ידוע שההפרש בין המספרים הוא זוגי?

פתרונות והערות

א. הטבלה הבאה מתארת את סכום הקוביות בכל אחת מ- 36 התוצאות האפשריות של הטלת שתי קוביות.

	1	1	2	3	3	4
1	2	2	3	4	4	5
1	2	2	3	4	4	5
2	3	3	4	5	5	6
3	4	4	5	6	6	7
3	4	4	5	6	6	7
4	5	5	6	7	7	8

ב. את ההסתברויות נמצא על ידי מניית מספר המופעים של כל תוצאה בטבלה.

ההסתברות לסכום 2 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 3 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 4 היא $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

ההסתברות לסכום 5 היא $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$

ההסתברות לסכום 6 היא $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

ההסתברות לסכום 7 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 8 היא $\frac{1}{36}$

ג. תחילה נשים לב שהפרש המספרים שעל שתי הקוביות הוא זוגי באותם המקרים בהם הסכום הקוביות זוגי (שני המספרים זוגיים או שניהם אי-זוגיים). מרחב האפשרויות מצטמצם מ- 36 ל- 20 תוצאות. ב- 6 מתוך 20 התוצאות האלה, סכום הקוביות הוא 6, לכן ההסתברות המותנית היא $\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$.

שאלה 12

מטילים מטבע הוגנת שלוש פעמים. נסמן את התוצאות האפשריות לכל הטלה ב- H וב- T.

א. מה ההסתברות שתתקבל הסדרה HHT (H בשתי ההטלות הראשונות ו- T בהטלה השלישית)?

ב. מה ההסתברות שתתקבל סדרה ובה בדיוק בשתיים מתוך 3 ההטלות יתקבל H?

ג. הסבירו מדוע התשובות לסעיפים א ו- ב שונות.

פתרונות והערות

א. $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

ב. יש שלוש אפשרויות למאורע זה: HHT, HTH, THH. לכל אחד יש הסתברות $\frac{1}{8}$ ולכן ההסתברות היא $\frac{3}{8}$.

ג. בשאלה בסעיף א סדר ההטלות משנה (סדרת הטלות). שאלה ב מתארת מאורע שבו הסדר לא משנה, ולכן יש יותר תוצאות מתאימות, וההסתברות גבוהה יותר.

שאלה 13

במשחק לוח "מקס וסע" כל שחקן או שחקנית מטיל, לפי התור, שתי קוביות. את כלי המשחק מקדמים בהתאם לתוצאה הגדולה מבין שתי הקוביות. למשל, אם בהטלה התקבל 3 ו- 4, מתקדמים ארבעה צעדים. אם התוצאות זהות, מתקדמים כמספר הצעדים של התוצאה.

א. מה ההסתברות להתקדם צעד אחד בתור מסוים?

ב. מה ההסתברות להתקדם שני צעדים בתור מסוים?

ג. מה ההסתברות להתקדם 3 צעדים?

ד. מה ההסתברות להתקדם 4 צעדים?

ה. מה ההסתברות להתקדם 5 צעדים?

ו. מה ההסתברות להתקדם 6 צעדים?

ז. ערן צריך להתקדם לפחות 3 צעדים על מנת לנצח. מה ההסתברות שזה יקרה?

ח. יעל צריכה להתקדם לפחות 4 צעדים על מנת לנצח. מה ההסתברות שזה יקרה?

ט. מה ההסתברות להתקדם לפחות צעד אחד?

מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

פתרונות והערות

את התוצאות נוח לרכז בעזרת טבלה בה 36 התוצאות האפשריות, בה בכל תא בטבלה מצוין המקסימום של שתי הקוביות.

מקסימום	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

ניתן לענות על השאלות על ידי התבוננות בטבלה

א. ההסתברות להתקדם רק צעד אחד בתור מסוים היא: $\frac{1}{36}$.

ב. ההסתברות להתקדם שני צעדים היא: $\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$

ג. ההסתברות להתקדם 3 צעדים: $\frac{5}{36}$

ד. ההסתברות להתקדם 4 צעדים: $\frac{7}{36}$

ה. ההסתברות להתקדם 5 צעדים: $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

ו. ההסתברות להתקדם 6 צעדים: $\frac{11}{36}$

ז. ההסתברות להתקדם לפחות 3 צעדים: $\frac{8}{9} = \frac{32}{36}$

ח. ההסתברות להתקדם לפחות 4 צעדים: $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$

ט. ההסתברות שנתקדם לפחות צעד אחד היא 1.

<u>שאלה 14 (המשך לשאלה הקודמת)</u>

במשחק לוח "מקס וסע" כל שחקן או שחקנית מטיל, לפי התור, שתי קוביות. את כלי המשחק מקדמים בהתאם לתוצאה <u>הגדולה</u> מבין שתי הקוביות. למשל, אם בהטלה התקבל 3 ו- 4, מתקדמים ארבעה צעדים. אם התוצאות זהות, מתקדמים כמספר הצעדים של התוצאה.

א. מה ההסתברות שקובייה בודדת תראה 6? מה ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה 6?

ב. מה ההסתברות שקובייה בודדת תראה <u>לפחות</u> 5? מה ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה <u>לפחות</u> 5?

ג. מה ההסתברות שקובייה בודדת תראה <u>לפחות</u> 4? מה ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה <u>לפחות</u> 4?

ד. עומר התבוננה בתשובות לזוגות של השאלות הקודמות וחושבת שהיא רואה חוקיות מסוימת: בכל השאלות שבסעיפים הקודמים, ההסתברות בחלק השני בשאלה היא כמעט פי שניים מההסתברות בסעיף הראשון. האם עומר צודקת? אם כן - נסו להסביר מדוע. אם עומר טועה, הראו דוגמה נגדית.

<u>פתרונות והערות</u>

א. ההסתברות שקובייה בודדת תראה 6 היא $\frac{1}{6}$. את ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה 6 נברר בטבלה. ב- 11 מתוך 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות המקסימום הוא 6, וההסתברות היא $\frac{11}{36}$.

ב. קובייה בודדת מראה לפחות 5 אם היא מראה 5 או 6. ההסתברות לכך היא $\frac{1}{3}$. ב- 20 מתוך 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות המקסימום הוא לפחות 5 (כלומר 5 או 6), וההסתברות היא $\frac{5}{9}$.

ג. קובייה בודדת מראה לפחות 5 אם היא מראה 4, 5 או 6. ההסתברות לכך היא $\frac{1}{2}$. ב- 27 מתוך 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות המקסימום הוא לפחות 4 (כלומר 4, 5 או 6), וההסתברות היא $\frac{3}{4}$.

ד. עומר צודקת. $\frac{11}{36}$ קטן במעט מפעמיים $\frac{1}{6}$ $(\frac{12}{36})$, $\frac{5}{9}$ קטן במעט מפעמיים $\frac{1}{3}$ $(\frac{6}{9})$, ו- $\frac{3}{4}$ קטן במעט מפעמיים $\frac{1}{2}$ (1). ניתן להסביר חוקיות זו בכמה אופנים.

i. נדון באפשרות הראשונה, שמקסימום שתי הקוביות הוא 6. כדי שזה יקרה, צריך שהראשונה תראה 6 (הסתברות $\frac{1}{6}$) או שהשנייה תראה 6 (הסתברות $\frac{1}{6}$). אם מאורעות אלו היו זרים, הינו מחברים את ההסתברויות ומקבלים $\frac{2}{6}$. אבל מאורעות אלה "כמעט זרים" – האפשרות של (6,6) משותפת לשניהם, ולכן ההסתברות מעט קטנה יותר מסכום ההסתברויות. באופן דומה נראה שהמאורעות "המספר הראשון לפחות 5" ו- "המספר השני הוא לפחות 5" גם הם "כמעט זרים", וכן הלאה.

ii. את אותה התופעה ניתן לראות גיאומטרית בטבלה. המאורע "קובייה ראשונה 6" מיוצג בשורה התחתונה של הטבלה, והמאורע "קובייה שנייה 6" מיוצג בעמודה הימנית של הטבלה). התוצאה (6,6) משותפת לשורה ולעמודה, ולכן מספר התוצאות הוא 11 ולא 12. באופן דומה, המאורע "קובייה ראשונה לפחות 5" מיוצג בשתי השורות התחתונות של הטבלה, והמאורע קובייה שנייה לפחות 5" מיוצג בשתי העמודות הימניות. המשותף למאורעות "כמעט זרים" אלה הוא ריבוע 2×2 בפינה הימנית התחתונה בטבלה.

iii. הסבר אלגברי לתופעה מובא בשאלה הבאה.

שאלה 15

קופץ לרוחק משתתף בתחרות אתלטיקה קלה.

א. על מנת לעלות לשלב הבא הוא צריך לקפוץ לפחות 5.50 מטרים. יש לרשותו שני ניסיונות. הוא כבר קפץ מרחק כזה בעבר, ואף יודע שבכל קפיצה שלו יש הסתברות של 50% שיצליח. מה ההסתברות שיעלה לשלב הבא, אם נניח שתוצאת כל קפיצה בלתי תלויה בתוצאות קפיצות אחרות?

ב. הקופץ עלה שלב! בשלב הבא עליו לקפוץ לפחות 5.75 מטרים. שוב יש לרשותו שני ניסיונות. ההסתברות שיקפוץ לפחות 5.75 מטרים בקפיצה בודדת היא 30%. מה ההסתברות שיעבור גם את השלב הזה?

ג. נסמן ב- x את ההסתברות שקופץ לרוחק יצליח בקפיצה בודדת. מה ההסתברות שיצליח לפחות באחת משתי קפיצות בלתי תלויות?

פתרונות והערות

א. נוח יותר לעבוד עם מאורע משלים. על מנת לא לעלות לשלב הבא הקופץ צריך להיכשל בשתי קפיצות. ההסתברות להיכשל בכל אחת היא $\frac{1}{2}$, ולכן ההסתברות להיכשל בשתיהן היא $\frac{1}{4}$ (נתון שהמאורעות בלתי תלויים). אם כן, ההסתברות לעלות לשלב הבא היא $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

ב. ההסתברות להיכשל בשני הניסיונות היא $70\% \times 70\% = 49\%$. ההסתברות להצליח לפחות באחת משתי הקפיצות היא $100\% - 49\% = 51\%$.

ג. ההסתברות להיכשל בקפיצה בודדת היא $1-x$ ולכן ההסתברות להיכשל בשתי הקפיצות הבלתי תלויות היא $(1-x)^2$. המאורע של הצלחה בלפחות אחת הקפיצות היא המאורע המשלים, וההסתברות שלו היא $1-(1-x)^2 = 2x - x^2$.
כאן יש מענה אלגברי לשאלה קודמת שבה נטען כך: אם ההסתברות של קובייה בודדת להראות לפחות N היא x, אז ההסתברות שהמספר הגדול מבין שתי קוביות יהיה לפחות N היא "מעט פחות מפעמים x ".

שאלה 16

בוחרים באקראי מספר בין 1 ל- 120.

א. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 (יהיה זוגי)?

ב. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3?

ג. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4?

ד. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 6?

ה. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 **וגם** יתחלק ב- 3?

ו. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 **או** יתחלק ב- 3?

ז. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3 **וגם** יתחלק ב- 6?

ח. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3 **או** יתחלק ב- 6?

ט. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 **וגם** יתחלק ב- 6?

י. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 **או** יתחלק ב- 6?

יא. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 **אם ידוע** שהוא מתחלק ב- 2?

יב. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 **אם ידוע** שהוא מתחלק ב- 3?

יג. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 **אם ידוע** שהוא מתחלק ב- 6?

יד. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3 **אם ידוע** שהוא מתחלק ב- 6?

פתרונות והערות

על סדרת שאלות זו אפשר לענות בדרכים רבות. ברמה הבסיסית ביותר יש כאן שאלות של שכיחות יחסית. לדוגמה (סעיף ב'): מבין המספרים הטבעיים עד 120 יש 40 מספרים שמתחלקים ב- 3, ולכן ההסתברות שמספר שנבחר באקראי יתחלק ב- 3 היא$\frac{1}{3}=\frac{40}{120}$, אבל אפשר לענות על שאלה זו בעזרת שיקולים שונים, למשל לשים לב שכל מספר שלישי מתחלק ב- 3, או באופן יותר מדויק: תכונת ההתחלקות ב- 3 היא מחזורית במחזור של שלוש (לא-לא-כן, לא-לא-כן), ובמספרים הטבעיים עד 120 יש מספר שלם של מחזורים כאלה.

חלק מהשאלות מזמנות גם עיסוק במושגים של אי תלות מאורעות. למשל סעיף ו': דרך סטנדרטית לענות על שאלה זו היא באמצעות שכיחות יחסית – 20 מבין 120 המספרים מתחלקים ב- 2 וב- 3. אבל אפשר לטעון שתכונות ההתחלקות ב- 2 וב- 3 הן בלתי תלויות כיוון שהמספרים 2 ו- 3 זרים. כלומר, ידיעה שמספר מתחלק ב- 2 לא משפיעה על סיכוייו להתחלק ב-3, ולהיפך. על פי שיקול זה, הסתברות היא $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$.

דברים דומים אמורים גם בשאלות של הסתברות מותנית. למשל סעיף מ'. שיטה סטנדרטית לענות על השאלה היא לצמצם את ההסתכלות במספרים שמתחלקים ב- 6 ולשאול מה השכיחות היחסית של המספרים מביניהם שמתחלקים ב- 4. דרך נוספת קושרת בין מושג האי-תלות ההסתברותית לזרות האלגברית. הידיעה שמספר מתחלק ב- 6 אומרת שהוא מתחלק ב- 2 וב- 3. ההתחלקות ב- 3 בלתי תלויה בהתחלקות ב- 4 (3 ו- 4 מספרים זרים), כך שהשאלה מצטמצמת לשאלת סיכויי ההתחלקות ב- 4 של מספרים המתחלקים ב- 2. כעת התשובה ברורה – חצי מהמספרים המתחלקים ב- 2 מתחלקים ב- 4.

תלמידים רבים עשויים לבלבל בין תלות הסתברותית ותלות סיבתית. מומלץ לנצל שאלות אלה לדון במשמעויות של אי-תלות כאשר היא רק הסתברותית ולא סיבתית, ולקשור נושא זה לנושאים אלגבריים בסיסיים כגון פירוק לגורמים ראשוניים, זרות, כפולה משותפת קטנה ביותר וכיוצא באלה.

א. ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 היא $\frac{1}{2}=\frac{60}{120}$. ניתן גם לטעון שכל מספר שני מתחלק ב- 2. על מנת לדייק בטיעון יש לשים לב ש- 120 עצמו הוא מספר זוגי. ההסתברות לבחור מספר שמתחלק ב- 2 מבין הטבעיים עד 120 היא מעט פחות מ- $\frac{1}{2}$.

ב. $\frac{1}{3}=\frac{40}{120}$.

ג. $\frac{1}{4}=\frac{30}{120}$.

ד. $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$.

ה. המספרים שמתחלקים ב- 2 וב- 3 הם בדיוק אלה שמתחלקים ב- 6, וכבר ראינו שההסתברות לכך היא $\frac{1}{6}$. דרך אחרת להסתכל על זה: המאורעות "מתחלק ב- 2" ו- "מתחלק ב- 3" הם בלתי תלויים כי 2 ו- 3 זרים. כלומר, היות מספר זוגי לא אומר לנו דבר על הסיכוי שלו להתחלק ב- 3, ולהיפך. חצי מהמספרים שמתחלקים ב- 3 הם זוגיים, וחצי אי-זוגיים. לכן ההסתברות להתחלק ב- 2 וב- 3 היא מכפלת ההסתברויות.

ו. המאורעות "מתחלק ב- 2" ו- "מתחלק ב- 3" אינם זרים (למשל 6 משותף לשניהם), ולכן לא נוכל לחבר הסתברויות. נוח לעבוד עם המאורע המשלים. ההסתברות <u>לא</u> להתחלק ב- 2 היא $\frac{1}{2}$ וההסתברות <u>לא</u> להתחלק ב- 3 היא $\frac{2}{3}$. ההסתברות לא להתחלק ב- 2 וגם לא להתחלק ב- 3 היא מכפלת ההסתברויות (כי המאורעות בלתי תלויים), כלומר $\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$. להתחלק ב- 2 או ב- 3 הוא המאורע המשלים, שהסתברותו $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-1$. דרך אחרת לענות על שאלה זו היא לשים לב שהתחלקות ב- 2 וב- 3 היא מחזורית במחזור 6. מבין המספרים 1 עד 6 יש ארבעה מספרים שמתחלקים ב- 2 או ב- 3 (2, 3, 4, 6), ודפוס זה חוזר על עצמו מחזורית. כלומר, מתוך כל רצף של ששה מספרים עוקבים, שני שליש מהם מתחלקים ב- 2 או ב- 3.

ז. המאורעות "מתחלק ב- 3" ו- "מתחלק ב- 6" תלויים: כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק ב- 3, ומחצית מהמספרים שמתחלקים ב- 3 מתחלקים ב- 6. לכן, המאורע "מתחלק ב- 3 וגם מתחלק ב- 6" זהה לחלוטין למאורע "מתחלק ב- 6", והסתברותו $\frac{1}{6}$.

ח. כאמור המאורעות "מתחלק ב- 3" ו- "מתחלק ב- 6" אינם זרים: המאורע "מתחלק ב- 6" מוכל במאורע "מתחלק ב- 3" - כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק גם ב- 3, וההסתברות שמספר יתחלק ב- 6 או ב- 3 היא $\frac{1}{6}$.

ט. המאורעות "מתחלק ב- 4" ו- מתחלק ב- 6" תלויים, אם כי לא כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק ב- 4, ולא כל מספר שמתחלק ב- 4 מתחלק ב- 6. המספרים המתחלקים ב- 6 וב- 4 הם המספרים המתחלקים ב- 12 (הכפולה המשותפת הקטנה ביותר), וההסתברות לכך היא $\frac{1}{12}$.

י. כאמור, המאורעות "מתחלק ב- 4" ו- מתחלק ב- 6" אינם זרים, אבל אף אחד מהמאורעות אינו מוכל בשני – יש מספרים שמתחלקים ב- 6 ולא ב- 4, ויש מספרים שמתחלקים ב- 4 ולא ב- 6. נמקד את ההסתכלות שלנו במספרים מ- 1 עד 12 (הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 4 ו- 6), שכן התחלקות ב-4 והתחלקות ב- 6 הן מחזוריות במחזור 12. מבין שנים עשר המספרים האלה יש שניים שמתחלקים ב- 6 (6 ו- 12) ושלושה מספרים שמתחלקים ב- 4 (4, 8, ו- 12), אבל יחד יש רק ארבעה כי 12 מתחלק בשניהם. אם כן, $\frac{4}{12}$ מהמספרים מתחלקים ב- 4 או ב- 6, ולכן ההסתברות לבחור מספר כזה היא $\frac{1}{3}$.

כ. מחצית המספרים המתחלקים ב- 2 מתחלקים גם ב- 4, ולכן ההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$.

ל. המאורעות "מתחלק ב- 2" ו- "מתחלק ב- 3" בלתי תלויים, ולכן ההסתברות שיתחלק ב- 2 היא $\frac{1}{2}$ בלי קשר להתחלקות ב- 3. במילים אחרות – הידיעה שמספר מתחלק ב- 3 לא משפיעה על סיכוייו להתחלק ב- 2. זאת ניתן לראות גם על ידי צמצום מרחב האפשרויות. ארבעים מהמספרים הטבעיים עד 120 מתחלקים ב- 3. מתוכם עשרים מספרים מתחלקים ב- 2 (אלה שמתחלקים ב- 6), והשכיחות היחסית שלהם היא $\frac{1}{2}$.

מ. תחילה נתבונן בשאלה באופן אלגברי. הידיעה שמספר מתחלק ב- 6 מבטיחה שהוא מתחלק ב- 2 וב- 3. עובדת התחלקותו ב- 3 לא רלוונטית לסיכויי התחלקותו ב- 4, אבל עובדת התחלקותו ב- 2 משפיעה על סיכויי התחלקותו ב- 4. חצי מהמספרים המתחלקים ב- 2 מתחלקים ב- 4 כך שההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$. כעת נענה על ידי צמצום מרחב ההסתברות. יש עשרים מספרים המתחלקים ב- 6, ומתוכם עשרה מספרים מתחלקים גם ב- 4 (הכפולות של 12 שהיא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 6 ו- 4). השכיחות היחסית שלהם היא $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$.

נ. כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק ב- 3, לכן ההסתברות היא 1.

<u>שאלה 17</u>[13]

רותי משחקת פעמיים במשחק מזל. ידוע שההסתברות לזכות בשני המשחקים היא 0.0144.

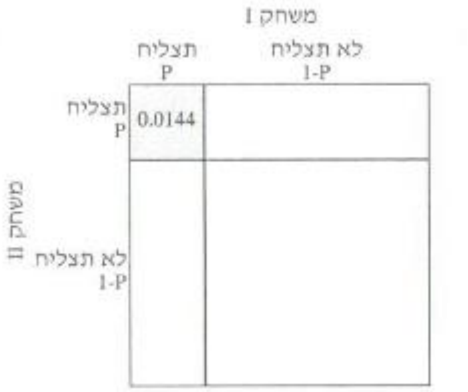
א. מה ההסתברות שרותי תזכה במשחק בודד?

ב. מה ההסתברות שהיא תזכה <u>בדיוק</u> במשחק אחד?

ג. מה ההסתברות שהיא תזכה <u>לפחות</u> במשחק אחד?

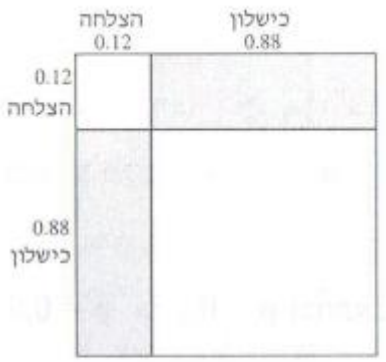
<u>פתרונות והערות</u>

א. הסתברות לזכייה בשני משחקים היא מכפלת ההסתברויות לזכות במשחק בודד, כלומר, $x^2 =$ 0.0144, לכן $x = 0.12$. ניתן לייצג זאת בעזרת מודל השטח, כך:



ב. ניתן לבנות את מודל השטח על פי ההסתברות להצלחה (זכיה) או כישלון (אי-הצלחה), כך:

[13] תרגיל 15 (עמוד 78) מתוך החוברת "הסתברות – לתלמידי 3-4 יחידות לימוד" (מהדורת עיצוב), מאת נ. הדס וט. זסלסבקי, הוצאת מכון ויצמן למדע 1996.



לזכות בדיוק במשחק אחד פירושו לזכות במשחק הראשון ולא זכות בשני, או לא לזכות בראשון ולזכות בשני. במודל השטח זה מיוצג על ידי המלבנים המושחרים, והחישוב הוא: $0.12 \times 0.88 +$ $0.88 \times 0.12 = 2 \times 0.12 \times 0.88 = 0.2112$.

ג. לזכות במשחק אחד לפחות כולל את האפשרות של לזכות במשחק אחד בדיוק או לזכות בשני משחקים גם יחד. כלומר, ניתן לחבר את התוצאות של שני הסעיפים הקודמים ומתקבלת ההסתברות $0.2112 +$ $0.0144 = 0.2256$. במודל השטח, זה מיוצג על ידי חיבור שלושת השטחים (שני המלבנים והריבוע הקטן). את החישוב ניתן גם לבצע על ידי חיסור המאורע המשלים כך: $1 - 0.88^2 = 0.2256$.

שאלה 18[14]

ב"מזל בורגר" מחלקים לכל לקוח טופס ובו חמישה ריבועים המכסים על חמישה ציורים, שניים מהם זהים. יש לגרד את הכיסוי של שני ריבועים בלבד. אם בשניהם מופיע אותו ציור מקבלים משקה חינם. מה הסתברות לזכות במשקה חינם?

פתרונות והערות

ההסתברות לקבל אחד משני הציורים הזהים בגירוד הראשון היא $\frac{2}{5}$. ההסתברות לקבל את הציור הזהה השני בגירוד השני הוא $\frac{1}{4}$. לכן ההסתברות לזכות בפרס היא $\frac{1}{10} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$.

[14] תרגיל 10 (עמוד 76) מתוך החוברת "הסתברות – לתלמידי 3-4 יחידות לימוד" (מהדורת עיצוב), מאת נ. הדס וט. זסלסבקי, הוצאת מכון ויצמן למדע 1996.

שאלה 19

זורקים קוביית משחק רגילה עליה רשומים המספרים 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ואת התוצאה רושמים במקום □ בביטוי האלגברי של הפונקציה $f(x) = x^2 - \square$.

א. מה ההסתברות שלגרף הפונקציה הריבועית יהיו שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x?

ב. מה ההסתברות שהפונקציה תעבור דרך ראשית הצירים?

ג. אם גרף הפונקציה (שהתקבל לאחר זריקת הקובייה) עובר דרך הנקודה (4,11), איזה מספר יצא בזריקה?

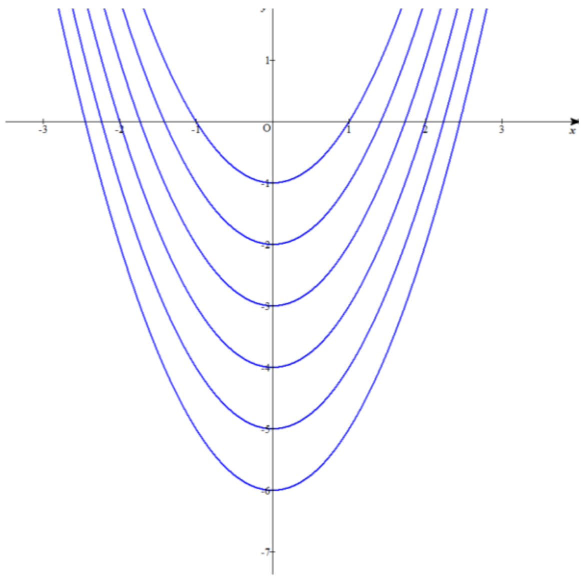
ד. בזריקת הקובייה התקבל המספר 3, רשמו ארבע נקודות על גרף הפונקציה שהתקבלה.

ה. הסבירו מדוע לא יתכן שאותה נקודה תשתייך לשני גרפים שונים שמתקבלים מזריקת הקובייה?

ו. רועי טוען כי לא משנה מה יצא בקובייה, גרף הפונקציה המתקבל לא יחתוך את הישר $y = -7$. האם הוא צודק? הסבירו.

פתרונות והערות

בשאלה זו נעשה קישור בין מושגים פשוטים בהסתברות לבין סוגיות בייצוג פונקציות ריבועיות מהצורה $f(x) = x^2 + c$ תוך הישענות על ראייה גרפית של הפונקציות ועל הזזות אנכיות של $f(x) = x^2$. ניתן להתחיל עם התלמידים בשרטוט של ששת המצבים האפשריים:



א. כל הגרפים (שהם הזזה כלפי מטה של הפונקציה $f(x) = x^2$) חותכים את ציר ה- x בשתי נקודות.
ניתן לראות זאת גם בביטוי האלגברי מהצורה $x^2 - \mathrm{c} = 0$, זאת משוואה שתמיד יש לה שני פתרונות.
לכן ההסתברות היא 1.

ב. ההסתברות היא אפס.

ג. 5. ניתן למצוא אותו על ידי הצבת הנקודה בביטוי של הפונקציה ואז על ידי פתרון המשוואה
$4^2 - \square = 11$.

ד. למשל, (4,13), (1,-2), (0,-3).

ה. כל גרף הוא הזזה אנכית של גרף אחר, לכן אין נקודות חיתוך ביניהם. כלומר, נקודה השייכת לגרף של פונקציה אחת לא יכולה להשתייך לגרף של אחרת. זאת ניתן לראות גם מהביטויים האלגבריים, כי למשוואה $x^2 - \mathrm{c} = x^2 - d$ אין פתרון אלא אם כן, $c = d$, כלומר כאשר מדובר באותה פונקציה.

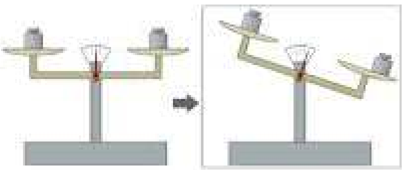
ו. רועי צודק. הנקודה בעל שיעור ה- y הקטן ביותר היא (0,-6), לכן הישר $y = -7$, לא חותך אף אחד מהגרפים שיתקבלו.

חזרה לתוכן העניינים

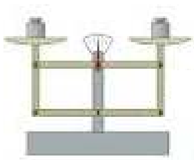
אוריינות מתמטית

<u>שאלה 1</u>

במאזני כפות רגילות יש בעיה: אם המסה בשני הצדדים שונה, ההטיה של הכפות עלולה לגרום לחפצים נשקלים להחליק, או אם מדובר בנוזל – להישפך.



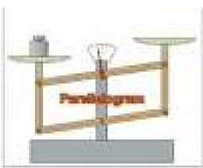
על מנת להתמודד עם בעיה זאת תכננו את המאזניים המתוארים בשרטוט



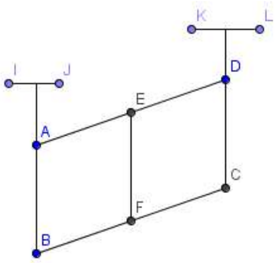
המורכבים מארבע זרועות במקום אחת. במאזניים האלה המבנה המלבני יכול להשתנות, כיוון שהצירים המסומנים מאפשרים שינוי בזוויות של המרובע.
שרטטו כיצד ייראו המאזניים אם המסות בשני הצדדים יהיו שונות. הסבירו כיצד זה פותר את הבעיה שתוארה. הוכיחו את כל טענותיכם בעזרת משפטים בגיאומטריה של מרובעים.

<u>פתרונות והערות</u>

המאזניים אם המסה בצד שמאל תהייה גדולה יותר ייראו כך:



על מנת לדון בבעיה במושגים גיאומטריים, נחליף את התרשים בסרטוט גיאומטרי.
נקודות A, B, C ו- D מייצגות את הצירים של המבנה המלבני. נקודות E ו- F מייצגות את החיבור של המבנה המרובע לגוף המאזניים.



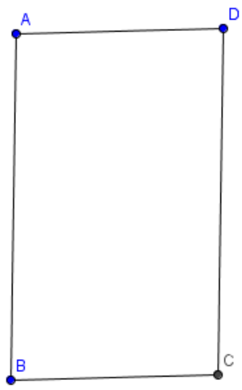
על פי נתוני הבנייה מתקיים כי AD = BC ו- AB = DC. E ו- F הם מרכזי הצלעות AD ו- BC בהתאמה. המרובע ABCD הוא מקבילית כיוון שיש בו שני זוגות של צלעות נגדיות שוות.
מאותה הסיבה גם מרובעים ABFE ו- EFCD הם מקביליות. במציאות, קטע EF מקובע למבנה של המאזניים ונשאר מאונך לרצפה. כיוון שכך, גם הישרים AB ו- CD יישארו מאונכים לרצפה.
כפות המאזניים - IJ ו- KL - יוצרים זווית ישרה עם AB ועם CD בהתאמה, ולכן מקבילות לרצפה. כיוון שכך, חומר המונח על הכפות לא יישפך ולא יחליק.

שאלה 2

חיים הרכיב ארון בעצמו. הוא חיבר את המדפים לדפנות, וכעת רוצה להדביק את גב הארון, אבל חושש שהזוויות של הארון אינן ישרות. עומד לרשותו רק "מטר" שבעזרתו הוא יכול למדוד אורכים. אין באפשרותו למדוד זוויות. הציעו לו כיצד הוא יוכל בכל זאת לבדוק אם זוויות הארון ישרות?

פתרונות והערות

להלן סקיצה של הארון.

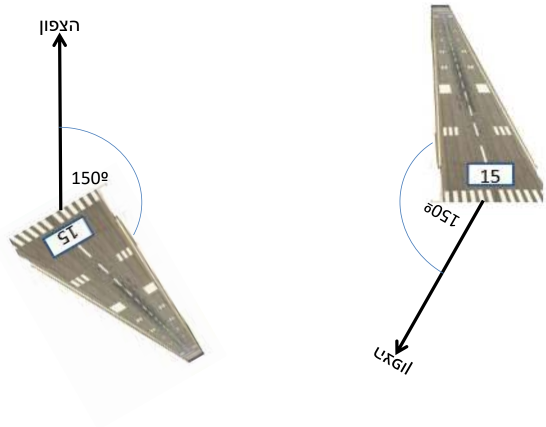


על מנת שכל הזוויות תהיינה ישרות, על המרובע ABCD להיות מלבן. בעזרת מטר יוכל לבדוק את התנאים ההכרחיים הבאים: $AB = CD$ ו- $AD = BC$. אך תנאים אלה מספיקים רק לקבוע שהמרובע הוא מקבילית, וזה לא מבטיח זוויות ישרות. כיוון שאין אפשרות למדוד את הזוויות באופן ישיר, יוכל חיים למדוד את אורכי האלכסונים. אם יגלה שהאלכסונים אינם שווים, חיים יוכל להסיק שהמקבילית איננה מלבן (משפט: במלבן האלכסונים שווים), ומכאן שהזוויות אינן ישרות. אם יגלה שהאלכסונים שווים, הרי ש- ABCD הוא מקבילית בעלת אלכסונים שווים, ולכן מלבן (משפט הפוך: מקבילית שאלכסוניה שווים היא מלבן). מכאן יסיק שכל הזוויות ישרות.

<u>שאלה 3[15]</u>

בנמלי תעופה גדולים יש מסלולי נחיתה רבים בכיוונים שונים. זאת כיוון שעדיף לנחות בכיוון שמנוגד לכיוון הרוח. חשוב מאד לסמן בבירור את המסלולים השונים ולקבוע שיטת סימון תקפה בכל העולם, על מנת שטייסים ינחתו במסלול הנכון. בתמונה מוצג מסלול המסומן במספר 15.

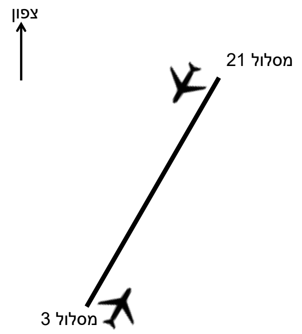
המספר המסומן מוכפל ב- 10 מייצג את הזווית שיוצר המטוס הנוחת או הממריא עם כיוון צפון (מדובר בזווית הנוצרת עם כיוון מחוגי השעון). כלומר מסלול זה (בכיוון החץ) מראה שהוא יותר זווית בת º150 עם הצפון, כמו שרואים באיור הבא (משתי נקודות מבט):



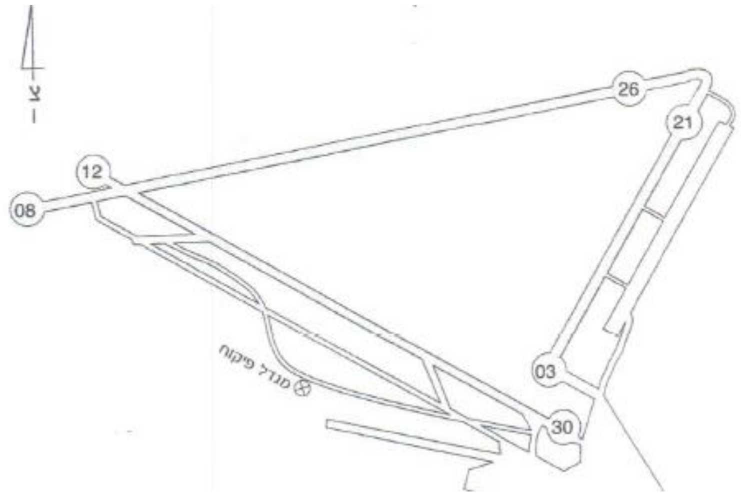
א. במסלול המשורטט להלן, נראים שני מטוסים ממריאים מאותו מסלול לשני כיוונים נגדיים, לכן למסלול זה שני סימונים, כל אחד בקצה אחד של המסלול (בנקודה שהמטוס מתחיל את המראתו או את נחיתתו). אילו זוויות יוצר מסלול זה עם הצפון (בהתחשב בכיוון המראתו/נחיתתו של המטוס)?

---

15 בהשראת משימה דומה מהספר "עושים ורואים גיאומטריה" בהוצאת המחלקה להוראת המדעים, מכון וימצן למדע.



ב. התרשים הבא הוא של המסלולים של נמל התעופה בן גוריון.



טייס א קיבל הוראה לנחות במסלול 26 וטייס ב הונחה לנחות במסלול 12. סמנו את המסלול שלהם ואת כיוון הנחיתות.

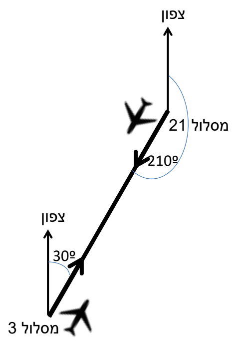
ג. רשות שדות התעופה שוקלת להוסיף מסלול שבקצותיו יהיה כתוב 16 ו- 34. הוסיפו בסקיצה היכן יכול להיות ממקום המסלול וסמנו את המספרים בקצותיו.

ד. בכל המסלולים שסומנו בשאלות הקודמות, החסירו את המספר הקטן מהמספר הגדול שנמצאים על אותו מסלול בשני קצותיו. הסבירו מה מצאתם?

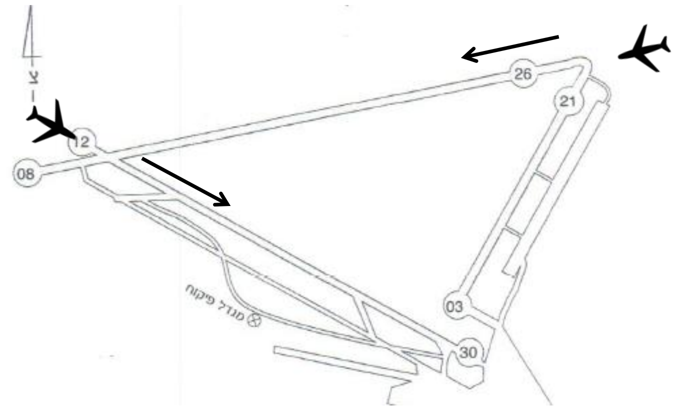
ה. בנמל תעופה מסוים מסודרים המסלולים בצורה של משולש שווה צלעות. אחד המסלולים מסומן במספר 2 (או 02). שרטטו את המשולש, סמנו את הצפון והשלימו את חמשת המספרים הנותרים על המסלולים.

<u>פתרונות והערות</u>

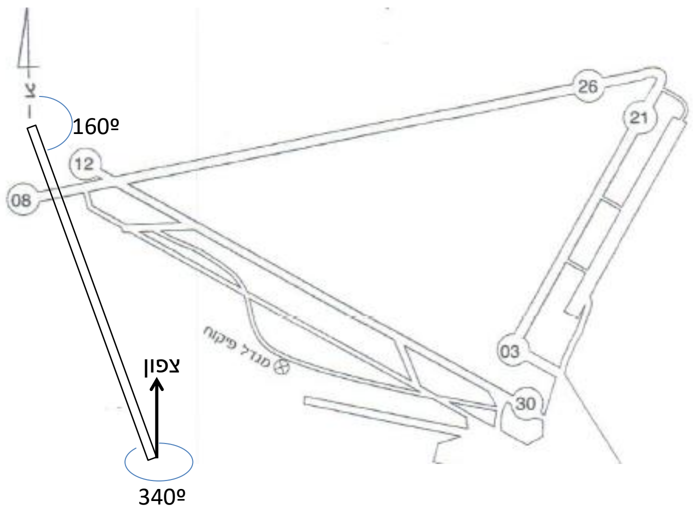
א.



ב.

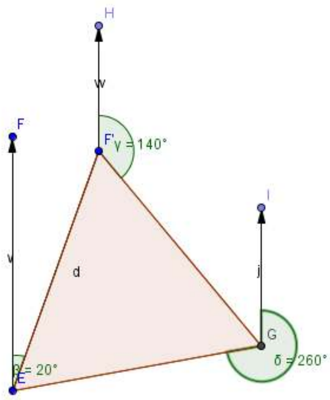


ג. המסלול מסומן, אך הוא יכול להיות בכל מיקום אחר בתנאי שהוא מקביל למסלול המסומן.



ד. תוצאת החיסור היא תמיד 18, כי ההפרש בין הזוויות הוא תמיד 180^o.

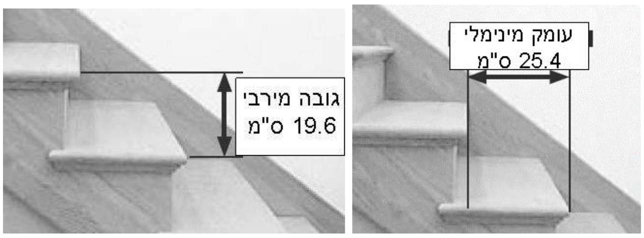
ה. יש לזכור כי כל זווית במשולש שווה צלעות היא בת 60^o ויש להיעזר בתשובה לסעיף הקודם.



המספרים המסומנים על המסלולים הם 2-20, 14-32, 26-8

שאלה 4

הנתונים הבאים לקוחים מספר הוראות לבנייה תקנית ובטיחותית של גרמי מדרגות בארה"ב.



א. הסבירו מדוע, לדעתכם, התקן קובע גובה מרבי ועומק מינימאלי.
ב. מה השיפוע של גרם מדרגות שנבנה על פי גובה מרבי ועומק מינימלי?
ג. תנו דוגמא של מדרגה תקנית עם שיפוע 0.5
ד. האם קיימת מדרגה בעלת שיפוע 0.5 עם גובה לא תקני? אם כן תנו דוגמא אם לא הסבירו מדוע?
ה. האם קיימת מדרגה בעלת שיפוע 0.5 עם עומק לא תקני? אם כן תנו דוגמא אם לא הסבירו מדוע?
ו. הסבירו מדוע לא תיתכן מדרגה תקנית בעלת שיפוע של 1?
ז. מהו השיפוע המרבי שגרם מדרגות תקני יכול ליצור ביחס לקרקע?

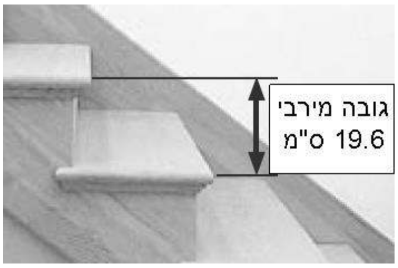
פתרונות והערות

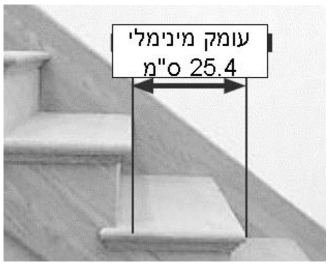
א. גובה המדרגה מחייב מאמץ גופני מסויים, אין משמעות לקבוע גובה מינימלי אך חשוב לתחום את הגובה המקסימלי כך שכל האנשים ללא מוגבלויות מיוחדות יוכלו לעלות ללא קושי. אין משמעות לקביעת רוחב מקסימלי אך רצוי לקבוע רוחב מינימלי כך כל כף רגל תונח בבטחה על המדרגה.
ב. כמו בשיפוע של קו ישר, ההגדרה היא: "גובה המדרגה" מחולק ב"רוחב המדרגה". כלומר, במקרה זה השיפוע יהיה $\frac{19.6}{25.4} = 0.77$.
ג. יש לחפש שני מספרים כך שהאחד הוא קטן מ- 19.6, השני גדול 25.4 והמנה ביניהם היא 0.5 - למשל 15 לגובה ו- 30 לרוחב.

ד-ה. מדרגה בגובה 20 ורוחב 40 היא בשיפוע 0.5 אך איננה תקנית כי גובה עולה על הגובה המותר.
מדרגה בגובה 12 ורוחב 24 היא בעלת שיפוע 0.5 אך היא אינה תקנית כי רוחבה קטן מהמותר.
ו-ז. ראה תשובה לסעיף א.

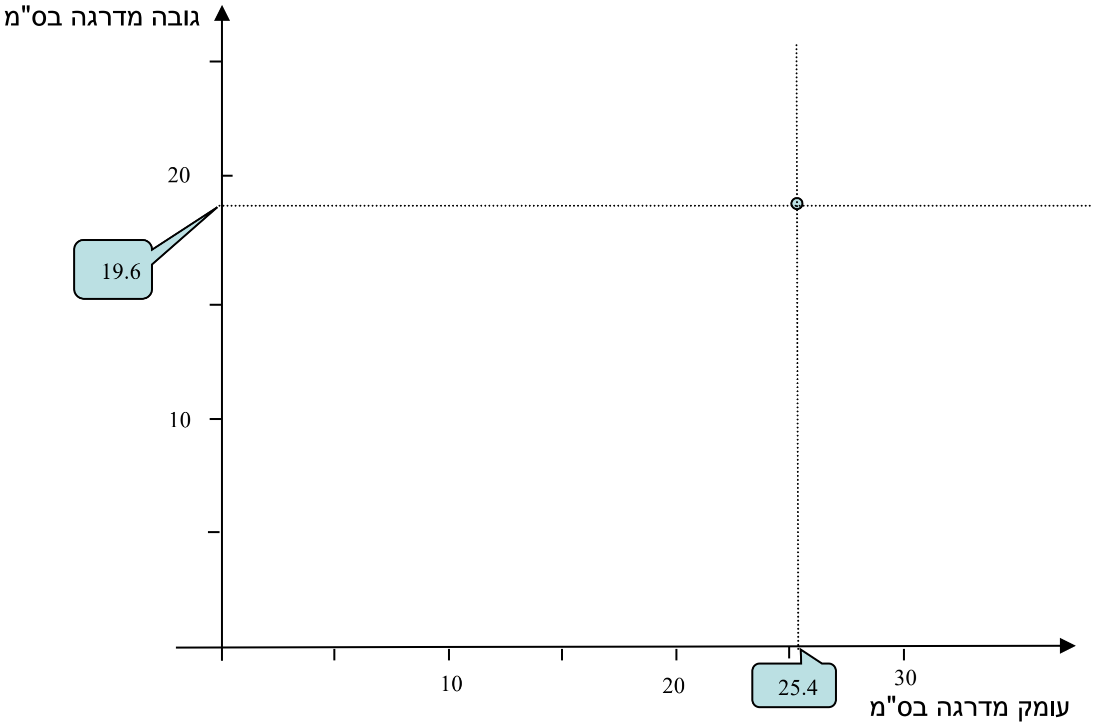
שאלה 5

הנתונים הבאים לקוחים מספר הוראות לבנייה תקנית ובטיחותית של גרמי מדרגות בארה"ב.





להלן ייצוג במערכת צירים של נתוני מדרגות.



א. הסבירו מה משמעות הנקודה המסומנת בגרף.

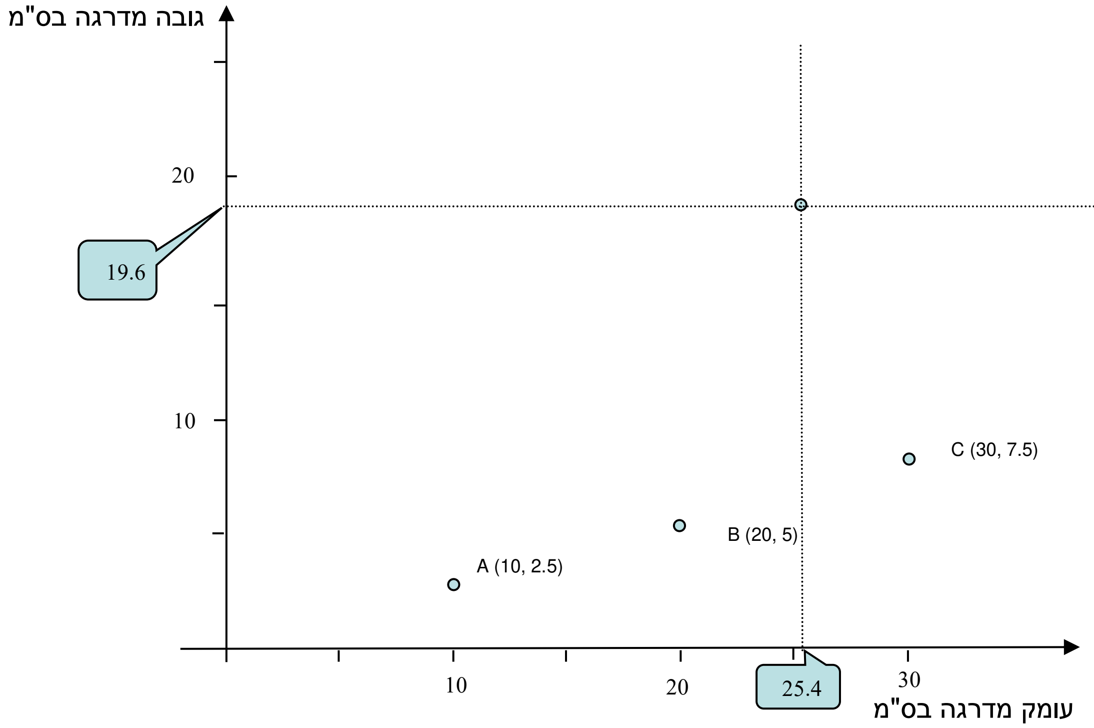
ב. סמנו נקודה שמייצגת מידות (עומק וגובה) של מדרגה תקנית. רשמו את שיעוריה.

ג. סמנו נקודה שמייצגת מידות (עומק וגובה) של מדרגה לא תקנית, רשמו את שיעוריה והסבירו מדוע היא איננה תקנית.

ד. רשמו שיעורים של 3 נקודות המייצגות מידות של מדרגות עם שיפוע 0.5 וסמנו אותן במערכת הצירים והסבירו מדוע הן על ישר אחד.

ה. בעבור איזה שיפוע של מדרגות יש רק זוג אחד של מידות תקניות? הסבירו.

ו. הנקודות A, B ו- C בגרף הבא נמצאות על אותו ישר. מצאו את משוואת הישר, הסבירו מה משמעותו בהקשר של המדרגות והוסיפו נקודה על ישר שמייצגת מדרגה תקנית.



פתרונות והערות

א. הנקודה מייצגת מדרגה שגובהה 19.6 ס"מ ועומקה 25.4 ס"מ.

ב. המדרגות התקניות מיוצגות על ידי נקודות הנמצאות ב"רביע" שנמצא מימין (מדרגות יותר רחבות מ- 25.4 ס"מ) עמוקה) ומתחת (מדרגות פחות גבוהות מ- 19.6 ס"מ) לנקודה המסומנת.

ג. מידות של אורך ורוחב של מדרגות שאינן תקניות מיוצגות על ידי נקודות הנמצאות בשלושת הריבעים האחרים מזה של הסעיף הקודם. בשניים משלושת הרביעים האלה אחד מהנתונים אינו תקני ובשלישי שניהם אינם תקניים.

ד. הישר y=0.5x מייצג את המדרגות ששיפוען 0.5, כי היחס בין גובה המדרגה לעומקה שווה בדיוק לשיפוע גרם המדרגות.שיפוע מירבי מחייב גובה מירבי ועומק מזערי: $\frac{19.6}{25.4} = 0.77$. עובדה זאת באה לידי ביטוי יפה בייצוג הגרפי: הרביע התקני (ימינה ולמטה מהנקודה המסומנת) חותך את הישר y=0.77x בנקודה אחת בלבד.

ה. הנקודות הן על הישר y=0.25x שמייצג מדרגות ששיפוען 0.25. רק מדרגה C היא תקנית. אפשר להוסיף, לדוגמה, (40, 10), אשר נמצאת על הישר ובתוך הרביע התקני.

שאלה 6

במדינת לארשי יחידת המטבע היא ביט. את תשלומי מס הכנסה מחשבים באופן הבא: משכורת עד 6000 ביט פטורה ממס. על משכורות מעל 6000 משלמים 60% מס על החלק של המשכורת שמעל 6000 שקלים. לדוגמה, על משכורת של 10000 ביט משלמים אפס מס על 6000 הביטים הראשונים ו- 60% על ה- 4000 הנותרים, כלומר 2400 ביט.

א. להלן טבלת משכורות של שישה אנשים. חשבו את סכום מס ההכנסה שמשלם כל אחד מהם והשלימו את הטבלה.

שם	משכורת	מס הכנסה
דן	7000	
תמר	20000	
גלית	25000	
אמיר	40000	

ב. כתבו ביטוי אלגברי לגובה המס כפונקציה של המשכורת.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה מהסעיף הקודם.

ד. ערן משלם על משכורתו מס בגובה 5400 ביט. מה גובה המשכורת שלו? הוסיפו שורה מתאימה בטבלה.

ה. רנה חישבה ומצאה שהמס שהיא משלמת על משכורתה היא בדיוק 40% מהמשכורת הכוללת. מה גובה המשכורת שלה?

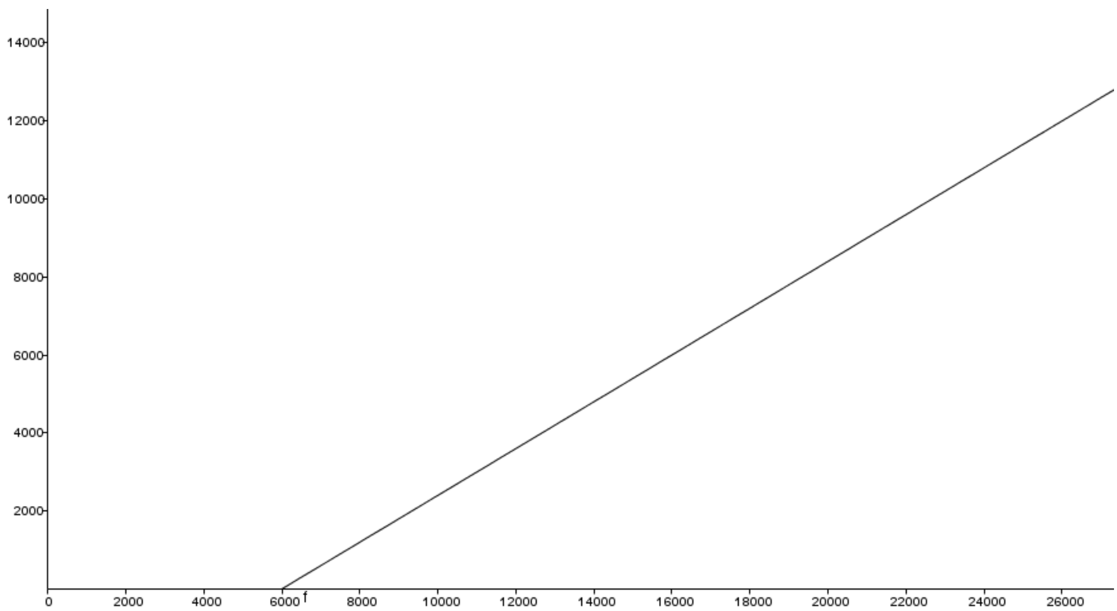
פתרונות והערות

א.

שם	משכורת	מס הכנסה	הסבר
דן	7000	600	60% מתוך 1000
תמר	20000	8400	60% מתוך 14000
גלית	25000	11400	60% מתוך 19000
אמיר	40000	20400	60% מתוך 34000

ב. עבור משכורת (x) קטנה מ- 6000 המס הוא 0. עבור x≥6000 המס מיוצג על ידי הביטוי $0.6(x-6000)$.

ג. להלן גרף הפונקציה:



ד. פתרון המשוואה $0.6(x-6000)=5400$ הוא x=15000.

ה. יש לפתור את המשוואה $0.6(x-6000)=0.4x$. x=18000.

שאלה 7

במדינת לארשי המטבע הוא ביט. בלארשי המס יחושב באופן הבא: אחוז המס שכל אזרח משלם יחושב כגובה המשכורת מחולק ב- 500, לדוגמה, בעל משכורת של 6000 ביט ישלם 12% מס על משכורתו, כלומר 720 ביט. אף אזרח לא ישלם יותר מ- 50% מס. אם החישוב נותן ערך גדול מ- 50, ישלם בעל המשכורת 50% מגובה משכורתו.

א. חשבו את גובה מס ההכנסה אשר ישלם כל אחד מן האזרחים בטבלה.

שם	משכורת	מס הכנסה
דן	7000	
תמר	20000	
גלית	25000	
אמיר	40000	

ב. כתבו ביטוי אלגברי לגובה המס כפונקציה של המשכורת.

ג. (אתגר) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה מהסעיף הקודם.

ד. זיו חישב ומצא שהוא ישלם 1280 ביט מס על משכורתו. מה גובה המשכורת שלו?

ה. זוהר חישבה ומצאה שהיא תשלם על משכורתה 10125 ביט. מה גובה המשכורת שלה?

ו. (אתגר) מצאו את כל המשכורות שעבורן גובה המס הוא שווה לגובה המס המתואר בשאלה הקודמת (40% על כל סכום מעל 6000).

פתרונות והערות

א.

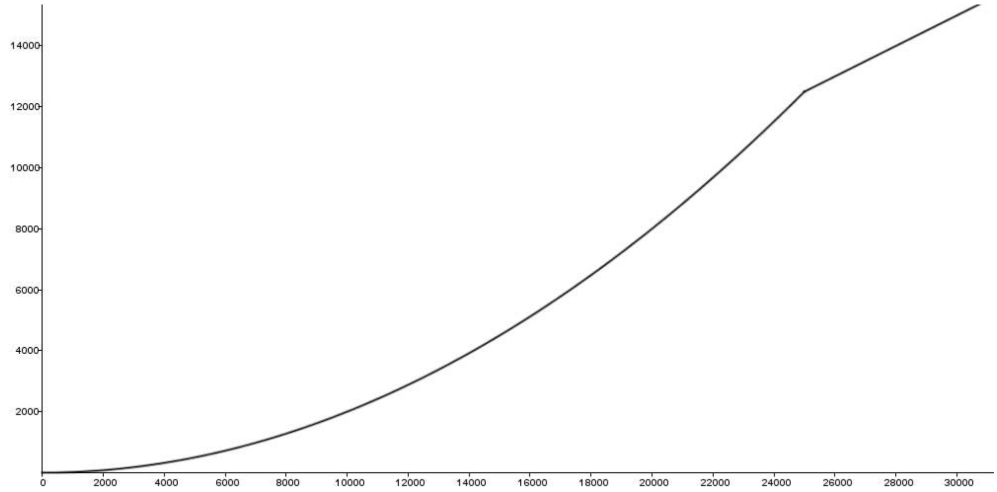
שם	משכורת	מס הכנסה	הסבר
דן	7000	980	$14 = \frac{7000}{500}$ - גובה המס 14%
תמר	20000	8000	$40 = \frac{20000}{500}$ - גובה המס 40%
גלית	25000	12500	$50 = \frac{25000}{500}$ - גובה המס 50%
אמיר	40000	20000	$80 = \frac{40000}{500}$ - גובה המס 50%

מעניין להשוות מי מפסיד ומי מרוויח לפי טבלה זו בהשוואה לטבלה של השאלה הקודמת.

ב. עד לתקרה של 50% אחוז, אחוז המס המשולם הוא $\frac{x}{500}$. לכן המס המשולם הוא $\frac{x^2}{50000} = \frac{x}{100} \cdot \frac{x}{500}$.
כדי לדעת באיזו משכורת מגיעים לתקרת גובה המס, נפתור את המשוואה $50 = \frac{x}{500}$ ונגלה שמעל משכורת של 25000 ביט משלמים מס הכנסה בגובה 50%.

ג.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50000} & x < 25000 \\ \frac{x}{2} & x \geq 25000 \end{cases}$$



ד. פתרון המשוואה $\frac{x^2}{50000} = 1280$ הוא $x = 8000$.

ה. המשכורת של זוהר נמוכה מ- 25000 שקלים, שכן בעלי משכורת גבוהה מ- 25000 משלמים יותר מ- 12500 שקלים מס. הפתרון של המשוואה: $\frac{x^2}{50000} = 10125$ הוא $x = 22500$.

ו. פונקציית המס בשאלה הקודמת (f) היא לינארית, ואילו בשאלה זו (g) היא תחילה ריבועית ואחר כך לינארית. עשויות להיות לכל היותר שלוש נקודות מפגש בין הגרפים - שתי נקודות מפגש בין f לחלק הריבועי של g, ועוד נקודת מפגש אחת עם החלק הלינארי של g. זה אכן המצב, ובזאת שאפשר להיווכח בשלוש דרכים - דרך הגרפים (שלוש נקודות חיתוך), דרך פתרון משוואות (בהמשך), ודרך טבלת הערכים. מההשוואה עולה כי הגרף של f נמצא:

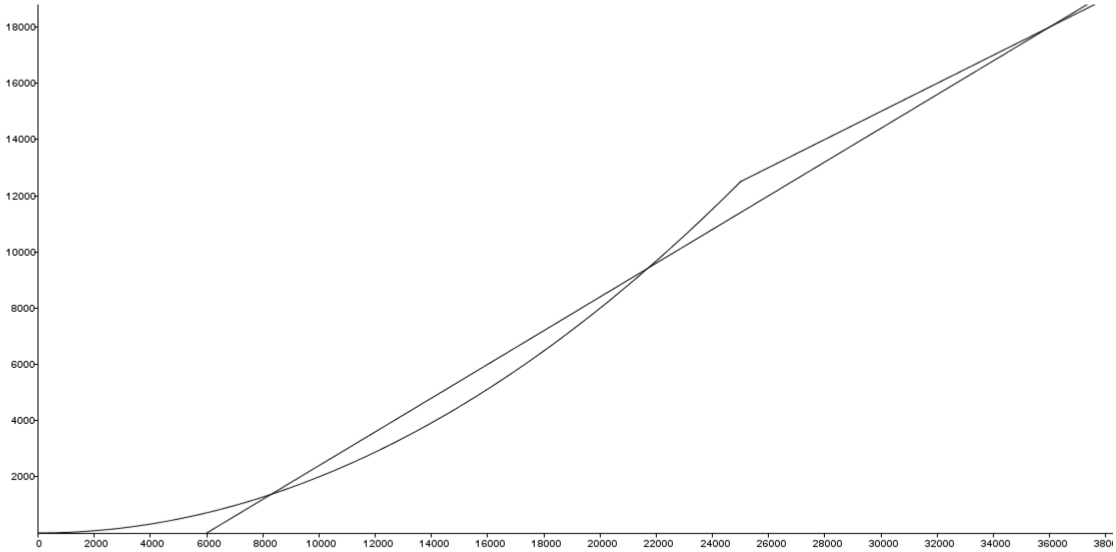
תחילה מעל הגרף של g - $f(7000) > g(7000)$

אחר כך מתחתיו - $f(20000) < g(20000)$

אחר כך שוב מעליו - $f(25000) > g(25000)$

ואחר כך שוב מתחתיו - $f(40000) < g(40000)$

מכאן נסיק שיש שלוש משכורות שונות שעבורן גובה המס שווה בשתי שיטות החישוב, אחת בין 7000 ל- 20000, אחת בין 20000 ל- 25000, ואחת בין 25000 ל- 40000.



נחשב כל אחת מהן:

$0.6(x-6000)=\frac{x^2}{50000}$ נותן שני פתרונות: x=8291.80 או x=21708.2

$0.6(x-6000)=\frac{x}{2}$ נותן פתרון יחיד: x=36000

שאלה 8

הביטוי $y = 1.5x + 3$ מקשר (בקירוב) בין אורך כף רגל בס"מ (x) לבין המידה של נעליים (y) בה משתמשים באירופה ובארץ.

א. אורך כף הרגל של נורית הוא 20 ס"מ. מה מידת הנעליים שלה?

ב. גד נועל נעליים במידה 45, מה אורך כף רגלו?

ג. ככל שאורך כף הרגל גדל ב-1 ס"מ, בכמה גדל מספר הנעל? הסבירו כיצד מצאתם.

ד. מצא ביטוי מהצורה $x = \cdots$ אשר בו תוכל להציב את מידת הנעל באגף הימין של הביטוי ולקבל לאחר חישוב מתאים את אורך כף הרגל בס"מ.

ה. ככל שמספר הנעל גדל במספר אחד, בכמה ס"מ גדל אורך כף הרגל?

ו. האם קיים מספר אחד שמציין הן את אורך כף הרגל והן את מידת הנעל המתאימה לו?

פתרונות והערות

א. $1.5 \times 20 + 3 = 33$

ב. $1.5x + 3 = 45$, $x = 27$

ג. המקדם של x (השיפוע) הוא זה שמראה על קצב ההשתנות, כלומר ככל ש-x משתנה ביחידה אחת, y משתנה ב- 1.5 יחידות.

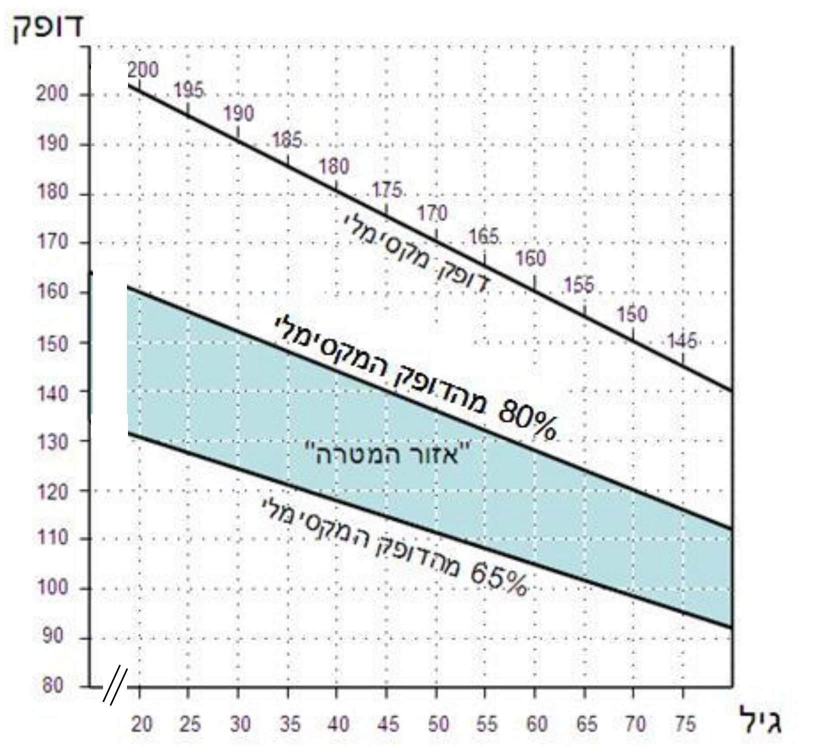
ד. $x = \frac{y-3}{1.5}$

ה. בשני שליש ס"מ. כמו בסעיף ג לעיל, קצב ההשתנות הוא השיפוע של הפונקציה, כלומר: $\frac{1}{1.5}$

ו. מספר כזה יתקבל כפתרון למשוואה $1.5x + 3 = x$. הפתרון למשוואה זו הוא שלילי ולכן אין מידה כזו.

שאלה 9

בכל גיל נתון, יש לבני אדם דופק מקסימלי (ערך הדופק הגבוה ביותר אליו ניתן להגיע במאמץ). באימון גופני מומלץ שהדופק יהיה בין 65% לבין 80% מערכו המקסימלי. הגרף הבא מתאר ערכים לפי גיל: הקו העליון מתאר את הדופק המקסימלי, שני הקווים האחרים מגדירים "אזור מטרה" (ערכים מומלצים של הדופק לפי גיל).



א. הדס בת 20. בעת האימון הדופק שלה עלה ל-175. האם דופק זה נמצא בטווח המומלץ בעבורה?

ב. מה הוא טווח הדופק הרצוי לאימון גופני של הדס, אם היא בת 20?

ג. רבקה בת 60. בעת אימון, הדופק שלה עלה ל-120. לאיזה אחוז של הדופק המקסימלי היא הגיעה? האם זה בטווח הרצוי?

ד. שלושה אנשים בני 25, 65 ו- 75 התאמנו. עבור כל אחד מהם נמדד הדופק שלוש פעמים ואלה שלושת המדידות: 100, 110 ו- 120. סמנו עבור כל אחד מהם, איזו מדידה מתאימה ל"איזור המטרה" ואיזו מדיה אינה מתאימה.

ה. רשמו ביטוי אלגברי לפונקציה שמתאימה לכל גיל את הדופק המקסימלי שלו.

ו. האם הקווים שתוחמים את אזור המטרה בגרף הם מקבילים? הסבירו.

ז. כיצד ניתן לתאר את "אזור המטרה" בעזרת ביטויים אלגבריים של פונקציה ואי-שיוויונות?

פתרונות והערות

א. לא. 175 נמצא מעל אזור המטרה.

ב. בין 130 (65% מ-200) ל-160 (80% של 200).

ג. 75%, וזה בטווח הרצוי (בין 65% ל-80%).

ד. בטבלה הבאה מסומן ב- √ הערכים שנמצאים באזור המטרה:

	דופק 100	דופק 110	דופק 120
גיל 25			
גיל 65		√	√
גיל 75		√	

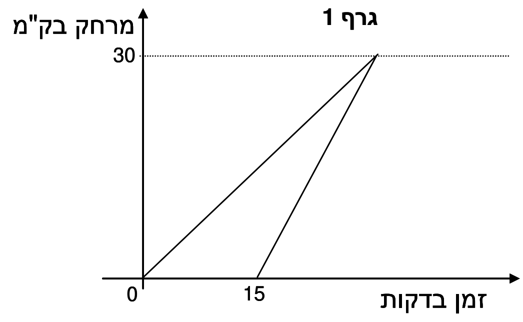
ה. $y = -x + 220$ (כלומר הדופק המקסימלי המתאים לכל גיל, מחושב על ידי 220 פחות הגיל). זאת ניתן למצוא על ידי חישוב משוואה של ישר דרך שתי נקודות.

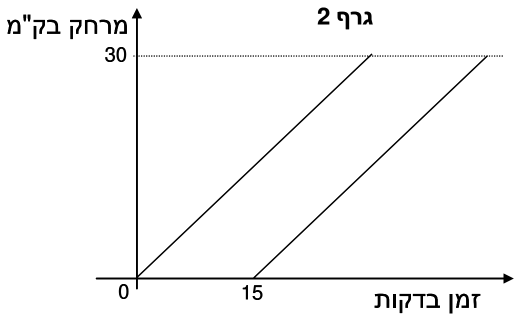
ו. הקווים נראים מקבילים, אך הם אינם מקבילים כי שיפועיהם שונים.

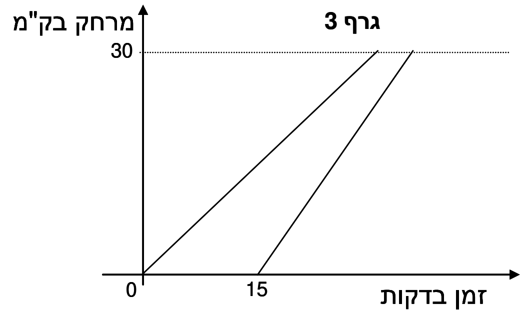
ז. משוואת הקו העליון של אזור המטרה היא $y = -\frac{4}{5}x + 176$. ניתן למצוא ביטוי זה על ידי חישוב 80% של מקדמי $y = -x + 220$ או על ידי חישוב משוואה של ישר דרך שתי נקודות. משוואת הקו התחתון של אזור המטרה היא $y = -0.65x + 141$. את אזור המטרה של דופק ט עבור גיל x ניתן לתאר כך: $-0.65x + 141 < y < -\frac{4}{5}x + 176$.

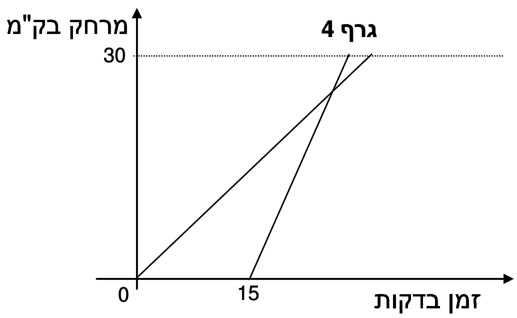
שאלה 10

גלי יצאה מרחובות לתל-אביב (מרחק של כ-30 ק"מ). לאחר 15 דקות, רמי יצא בעקבותיה. הגרפים הבאים מתארים מצבים אפשריים של נסיעתם (בהנחה שנסעו במהירות קבועה).









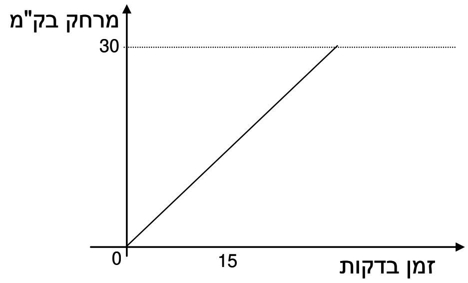
א. בכל גרף, סמנו איזה משני הישרים מתאר את הנסיעה של רמי ואיזה ישר מתאר את הנסיעה של גלי. הסבירו.

ב. אילו גרפים מתארים שהמהירות של רמי גדולה מזו של גלי. הסבירו.

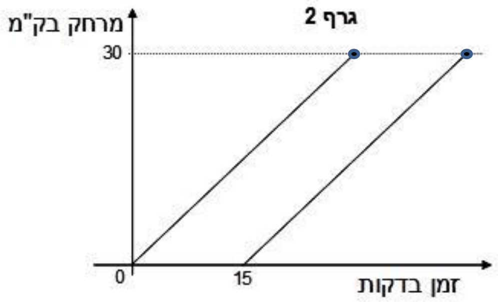
ג. איזה גרף מתאר שרמי נסע מהר יותר אך הוא הגיע כמה דקות אחרי גלי? הסבירו.

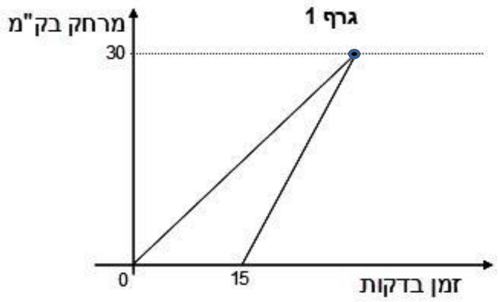
ד. איזה גרף מתאר שרמי הגיע לת"א 15 דקות אחרי גלי? הסבירו.

ה. הוסיפו בגרף הבא, ישר המתאר את הנסיעה של רמי אם הוא יצא 15 דקות אחרי גלי אך נסע לאט יותר.



ו. אם המהירות של גלי היא 60 קמ"ש (בכל אחד מהגרפים), סמנו את שיעורי הנקודות בשני הגרפים הבאים, וכתבו ביטוי אלגברי לכל הקווים.





<u>פתרונות והערות</u>

א. הישרים שעוברים בראשית המירים מתארים את נסיעתה של גלי, והישרים האחרים את נסיעתו של רמי.

ב. בגרפים 1,3 ו- 4 המהירות של רמי גדולה יותר מהמהירות של גלי כי שיפועי הישרים גדולים יותר (השיפוע של הישר מתאר מרחק ליחידת זמן, כלומר המהירות).

ג. גרף 3.

ד. בגרף 2 הישרים מקבילים (כלומר נסעו באותה מהירות), ולכן רואים כי המרחק האנכי בין שני הקווים נשאר קבוע (כלומר, בכל מרחק נתון רואים כי הפרש הזמנים נשמר קבוע, 15 דקות).

ה. כל גרף בו השיפוע של הקטע הישר שמתחיל בנקודה (15,0) קטן יותר מהגרף המתאר את הנסיעה של גלי.

ו. בגרף אחד מסומנת הנקודה (30,30) ובגרף 2 מסומנות הנקודות (30,30) ו- (45,30). משוואות הישרים בגרף 1 הן: $y = x$ ו- $y = 2x - 30$. יש לשים לב כי משוואות אלה מבטאות את המהירות בק"מ לדקה (כפי שהגרף מציין במפורש). במשוואה הראשונה השיפוע הוא 1, כלומר המהירות היא קילומטר לדקה (60 קמ"ש). במשוואה השנייה השיפוע הוא 2, כלומר 2 קילומטר לדקה, כלומר 120 קמ"ש, מהירות שאינה מותרת בכביש זה!). המשוואות בגרף 2 הן: $y = x$ ו- $y = 2x - 15$. גם במקרה זה יש לשים לב ליחידות!

<u>שאלה 11</u> (מתאימה לתלמידים המעוניינים לקרוא טקסט ולעבוד על השאלה כשיעורי בית)

ב- 23 ביולי 1983, המריאה טיסת אייר קנדה (Air Canada) מס' 143 ממונטריאול (Montreal), קנדה, לאדמונטון (Edmonton) עם חניית ביניים באוטאווה (Ottawa) .

היום היה בהיר ולא היה צפוי שינוי כלשהו במזג האוויר. לאחר חניית הביניים, הטיסה המריאה מאוטווה ללא בעיות. דגם המטוס (Boeing 767) היה חדיש, ובאותה תקופה היה נחשב למשוכלל בעולם מבחינה טכנולוגית. המטוס הוא דו מנועי, אך גדול, עם קיבולת המאפשרת להטיס כ- 250 נוסעים.

החידושים הטכנולוגים אמורים להקל על חיי הטייס. כל המכשור במטוס ממוחשב, עד כדי כך שהתקן הפסיק לחייב נוכחות של מהנדס טיסה בצוות שכלל רק טייס וטייס משנה. אחרי שהמטוס עבר את האזור של רד לייק (Red Lake), נדלקה נורית אדומה ונשמעה אזעקה – הטייסים מיד אבחנו שמדובר בתקלה כלשהי באחת משש משאבות הדלק של המטוס. משאבת הדלק אמורה להעביר דלק משלושת המכלים של המטוס (אחד בכל כנף ואחד בבטן המטוס) לשני המנועים. לכל מיכל שתי משאבות. התקלה יכולה לנבוע ממספר סיבות: תקלה במשאבה עצמה, צינור פקוק, או חוסר דלק במיכל. לא יתכן שהדלק אזל כי הדבר נבדק היטב לפני הטיסה והתדלוק התבצע. הטייס בדק את הטעון בדיקה ומיד הבין שגם אם אין אפשרות לתקן שום דבר, המטוס יוכל להמשיך ללא משאבה אחת – הרי יש בסך הכול שש משאבות! לאחר כמה רגעים של שקט, נדלקה הנורית שוב, והמשאבה השנייה הקשורה לאותו מיכל דלק שבקה חיים. זה כבר היה מוזר בעיני הטייסים, ולכן החליטו לנחות בוויניפג (Winnipeg). פקחי הטיסה אישרו את בקשת הטייסים.

לא עבר זמן רב וכל ארבע משאבות הדלק הנוספות נדמו. זמן קצר לאחר מכן, אחד המנועים הפסיק לפעול אף הוא, ובהעדר משאבות דלק פעילות, הפסקת הפעולה של המנוע השני עלולה הייתה להתרחש תוך דקות ספורות.

הטייס הודיע על כך מיד לפקחי הטיסה בוויניפג וביקש הכנות לנחיתת אונס עם חשש להתרסקות. הוא התחיל לכבות את מה שניתן כדי לנסות לחסוך את מעט הדלק שעדיין זרם למנוע השני. הטייסים התחילו להתכונן לנחיתה בעזרת מנוע אחד בלבד. כשהתחילו להנמיך, המנוע השני הפסיק לפעול לגמרי. ללא מנועים, לא רק שאין הנעה למטוס, אלא שגם כל המערכות (המופעלות על ידי הזרם החשמלי שמחוללים המנועים) משתתקות, והמכונה המשוכללת נשארת דואה באוויר ללא כל אפשרות של שליטה עליה. מטוס כזה יכול לדאות באוויר לזמן מה בתנאי ש: 1- טייסו מיומן ביותר בכך (ולא כל טייס מיומן בדאייה), 2- הנחיתה קרובה, ו3- לפחות חלק מהמערכות פועלות כדי לאפשר לטייס לתמרן את הדאייה לקראת נחיתה. במקרה שלנו, הטייס היה מנוסה בדאייה, אך היעד (וויניפג) היה במרחק של כ- 160 קילומטר ולא היה ברור אם המערכות הנחוצות יפעלו.

ובכן, המטוס המשוכלל שמנועיו הפסיקו לפעול נמצא דואה בשמיים כמעט ללא כל תקווה להינצל מהתרסקות וודאית. הבלתי ייאמן קרה – כיוון שההסתברות שבכל שש המשאבות תתרחש בו זמנית אותה תקלה (או תקלות שונות) היא אפסית, ברור כי למטוס אזל הדלק. איך יתכן שדבר כזה יקרה? מה לא עבד כאן נכון? ובכן מה שלא עבד כאן נכון הוא היבט מסוים של "חשיבה כמותית".

אמנם המטוס היה חדש לגמרי ותקני התחזוקה היו נושא לבדיקה, תיקון ועדכון. אך, כאשר המטוס היה לפני המראה ממונטריאול, התגלתה תקלה במד הדלק האלקטרוני. מד דלק כזה מראה לטייס מהי כמות הדלק במכלים ומהי כמות הדלק הנחוצה כדי להטיס את המטוס ליעד שנבחר. עובדי התחזוקה שכנעו את הטייס שאין צורך לעכב את הטיסה כי ניתן למדוד את כמות הדלק באופן ידני ולבדוק בטבלאות כמה נחוץ לטיסה. בדיקה ידנית של כמות הדלק במכלים מתבצעת בשיטה שקוראים לה באנגלית dipstick (מקלון טבילה) וימיה כימי תולדות הטיסה. שיטה זו דומה לאופן בו מודדים את השמן במכוניות. מכונאי מכניס מקלון למיכל, המקלון נרטב עד גובה פני הדלק במיכל ועם הוצאתו ניתן לקרוא נתון זה ולתרגמו, בעזרת טבלאות מתאימות, לנתוני נפח. פרוצדורה זאת התבצעה ללא דופי במונטריאול, לפני ההמראה, במטרה לתדלק את המטוס לכל הטיסה, כך שלא יהיה צורך בתדלוק נוסף בחניית הביניים.

הבדיקה הידנית וקריאת הנתונים הראו כי סך כמות הדלק במכלים היה 7,682 <u>ליטרים</u>. כל מה שנותר לבדוק היה איזה כמות דרושה לטיסה, לחסר מכמות זאת את מה שכבר יש במכלים (שנשאר כעודף מטיסה קודמת) ולהוסיף את הדלק שחסר.

הטייסים בדקו כי לטיסה כולה היו דרושים 22,300 <u>קילוגרמים</u> של דלק (כמות זו כוללת דלק נוסף במקרה של הארכת הטיסה מסיבות כלשהן). לכן, הבעיה היא "אם במכלים יש 7,682 <u>ליטרים</u> של דלק, כמה ליטרים יש להוסיף כדי להגיע לסך הכול של 22,300 <u>הקילוגרמים</u> הנחוצים לכל הטיסה"?

הנתון הנחוץ לפתרון בעיה זו הוא משקל של ליטר דלק, או במלים אחרות המשקל הסגולי של הדלק. על פי חישובים שנערכו בעבר, הם השתמשו ביחס המרה של 1.77 ק"ג לליטר.

א. במכלים היו 7,682 ליטרים של דלק. בהנחה כי המשקל של כל ליטר דלק הוא 1.77 ק"ג, מה משקל הדלק שהיה במכלים?

ב. כדי להשלים את הטיסה היו דרושים 22,300 ק"ג של דלק. כמה קילוגרמים היו חסרים להשלמת הטיסה?

ג. על פי החישוב הנ"ל, כמה ליטרים של דלק יש להוסיף?

ד. באותם הימים, עברו בקנדה לשיטה המטרית. וככל הנראה, זו הייתה הסיבה שאף אחד לא שם לב כי התבססו על משקל הסגולי שגוי. המשקל הסגולי של דלק סילוני הוא 1.77 פאונד לליטר. פאונד אחד שקול ל- 0.45359 קילוגרם. בצעו את החישובים הקודמים על פי הנתונים המתוקנים. כמה דלק היה חסר להשלמת הטיסה? תנו את תשובתכם ביחידות של ק"ג, פאונד וליטר.

פתרונות והערות

א. $7682 \times 1.77 = 13597.14$. על פי החישוב היו במכלים כ- 13600 ק"ג דלק.

ב. $22300 - 13597 = 8703$. על פי החישוב היו חסרים להשלמת הטיסה כ- 8700 ק"ג דלק.

ג. $8703 \div 1.77 = 4916$. על פי החישוב היו חסרים להשלמת הטיסה כ- 4916 ליטר דלק.

ד. החישוב הנכון היה צריך להיות: $1.77\,\frac{\text{פאונד}}{\text{ליטר}} \times 0.45359\,\frac{\text{ק"ג}}{\text{פאונד}} = 0.804\,\frac{\text{ק"ג}}{\text{ליטר}}$

לכן משקלו האמיתי של הדלק שהיה במכלים לפני התדלוק היה

$7682 \times 0.804 = 6180$ ק"ג

ולכן, להשלמת הטיסה כמתוכנן היו נחוצים $22300 - 6180 = 16120$ ק"ג נוספים של דלק, שהם $16120 : 0.45359 = 35539$ פאונד. כמות זו שקולה ל- $\frac{16120}{0.804} =$ ליטרים, שהם 20050 ליטר, פי 5 יותר מהכמות שהוסיפו בפועל בגלל אי תשומת לב ליחידות.

סוף דבר

מקרה זה מעיד לא רק על טעות בבחירת נתון ביחידות מדידה לא נכונות, אלא גם על היעדר "חוש למספרים". סביר להניח כי מכונאים ומתדלקים של מטוסים יודעים כי דלק קל יותר ממים (שמשקלו קילוגרם לליטר) ולכן, לא יתכן כי משקלו של ליטר דלק הוא 1.77 ק"ג. כמו כן, ניתן לטעון כי בעלי "חוש למספרים" במקרה זה היו

תוהים האם יתכן כי כמות הדלק במכלי המטוס לפני התדלוק (שככל הנראה נשארה מטיסה קודמת) מהווה כשני שליש מסך כמות הדלק הדרושה לטיסה כה ארוכה.

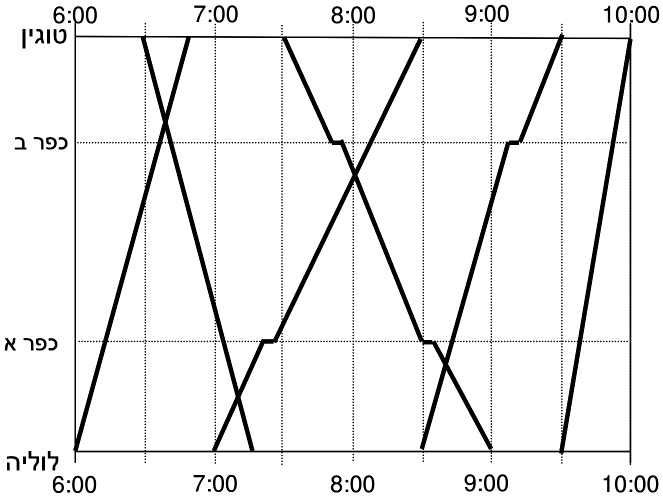
מסיפור זה, ומרבים אחרים, ניתן להסיק כי חשיבה כמותית חייבת לכלול מרכיבים נוספים מעבר למיומנויות החישוב. שאלות כמו "האם המספרים הגיוניים להקשר?" עשויות להפנות את תשומת הלב לתיקון שגיאות שכרוכות בדיני נפשות.

מה קרה למטוס? המטוס דאה עם מנועים דוממים. הטייס הבין כי לא יוכל לדאות עד לוויניפג. אך, הוא הבין כי בעזרת טורבינת חרום (שאינה פועלת על דלק, אלא על זרימת אוויר) המספקת כח שמאפשר תמרונים מסוימים, יוכל להביא את המטוס לנחיתת חרום בשדה תעופה קרוב, אם יימצא כזה. למזלם, נודע לטייס על קיום שדה תעופה נטוש בסביבה אשר שימש ילדים לרכיבה על אופניים ולאימון בסקטים. המטוס תומרן על ידי הטייס המיומן שהצליח להנחיתו ללא נפגעים ולאחר שגרם לבהלה ולמנוסה של ילדים ומבוגרים אשר בילו את השבת על המסלול הנטוש. המטוס שבר את הגלגלים הקדמיים ונעצר ללא הצתה (שעלולה הייתה להיגרם משפשוף גחון המטוס עם האספלט) מטרים ספורים לפני סוף המסלול.

פרטים נוספים על סיפור אמיתי זה ועל הסרט העלילתי שהופק בעקבותיו ("נפילה חופשית 174") ניתן למצוא באינטרנט.

שאלה 12

להלן לוח זמנים של רכבות הבוקר בין הערים לוליה וטוגין (עם תחנות ביניים בכפר א ובכפר ב). לוחות מסוג זה היו נהוגים באירופה במאה ה-19.



א. באיזו שעה מגיעה לטוגין רכבת שיוצאת מלוליה בשעה 7:00?

ב. באיזו שעה מגיעה ללוליה רכבת שיצאה מטוגין בשעה 7:30?

ג. ציינו ליד כל גרף האם הוא מייצג זמני נסיעה של רכבת ישירה (ללא תחנות ביניים) או מאספת והסבירו.

ד. דני רוצה לנסוע מלוליה לכפר א. יש רק רכבת אחת מתאימה. באיזו שעה עליו לצאת?

ה. יונה רוצה לנסוע מלוליה לכפר ב. יש רק רכבת אחת מתאימה. באיזו שעה עליו לצאת?

ו. איזו רכבת יותר מהירה: זו שיוצאת מלוליה ב-7:00 או זו שיוצאת ב-8:30? הסבירו.

ז. מצאו את הרכבת המהירה ביותר. הסבירו.

ח. באיזו שעה פוגשת הרכבת שיוצאת מטוגין ב-7:30 את הרכבת שיצאה מלוליה ב-7:00? כמה זמן אחרי היציאה מטוגין מתרחש המפגש? כיצד ניתן לראות זאת בגרף?

ט. המרחק בין שתי הערים הוא 90 ק"מ. מה היא המהירות הממוצעת של הרכבת שיוצאת מטוגין ב-7:30?

פתרונות והערות

א. 8:30

ב. 9:00

ג. קו ישר מציין נסיעה ללא עצירות, קו "שבור" מציין נסיעה עם עצירה.

ד. 7:00

ה. 8:30

ו. הרכבת שיוצאת ב-8:30

ז. הרכבת המהירה ביותר מיוצגת על ידי הקו התלול ביותר (אותו מרחק בפחות זמן) והיא זו שיוצאת מלוליה ב-9:30 וזמן נסיעתה שעה אחת.

ח. חצי שעה, על פי הזמן שעובר מזמן היציאה עד זמן הפגישה (של שני הקווים).

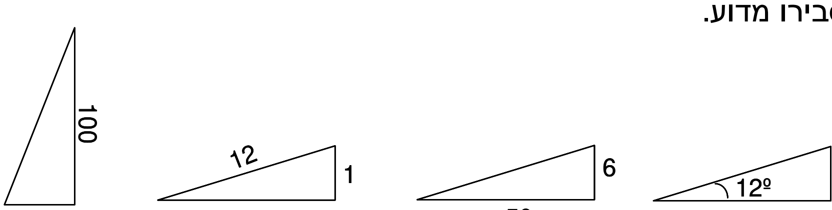
ט. 60 קמ"ש. יש לציין שמהירות ממוצעת זו מושפעת משתי העצירות בדרך.

שאלה 13

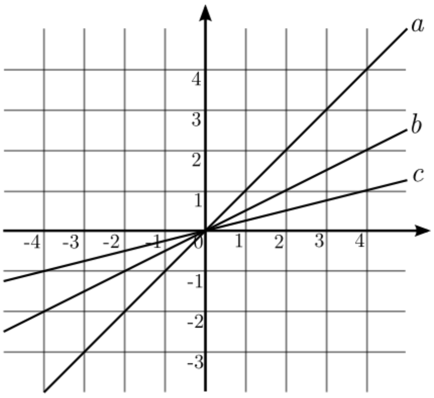
במקומות מסוימים בעולם ישנם תמרורים המראים את מידת התלילות של כביש באמצעות אחוזים (ראו תמונה). תלילות של כביש מחושבת כמו שיפוע של ישר במערכת צירים.

איסלנד – צילום: א. הרכבי

א. להלן סקיצות של קטע כביש (היתר בכל אחד מהמשולשים). רק אחת מהן מתאימה לשיפוע של 12% (0.12). סמנו איזו והסבירו מדוע.



ב. התאימו לכל ישר בגרף את אחוזי השיפוע הבאים: 100%, 25% ו- 50%. הסבירו את תשובותיכם.



ג. רשמו משוואה של ישר ששיפועו 20% ועובר דרך הנקודה (5,2).

ד. יש מצבים שבהם משתמשים ביחידות של אלפיות למדוד זוויות. יש בדיוק 6400 אלפיות במעגל. השם אלפית נבחר כיוון שזווית של אלפית אחת היא בקירוב הזווית (ביחס לכיוון האופקי) של ישר ששיפועו 0.1%=0.001. המצב הזה שבו השיפוע של ישר שווה (בקירוב) לזווית שהוא יוצר עם הכיוון האופקי לא מתקיים עבור כל זווית, אבל הוא כן מתקיים עבור זוויות קטנות . חשבו בקירוב את הזווית (ביחס לכיוון אופקי) של קטע כביש ששיפועו 5%. בטאו את תשובתכם באלפיות ובמעלות.

<u>פתרונות והערות</u>

א. רק כאשר הניצב הקטן הוא 6 והגדול 50, השיפוע הוא של 0.12.

ב. ישר a הוא בעל שיפוע של 100% כלומר 1, ישר b הוא בעל שיפוע של 50%, כלומר 0.5 וישר c הוא בעל שיפוע של 0.25. זאת ניתן לקרוא מהגרפים.

ג. $y = 0.2x + 1$

ד. זווית בת 5% (5 מאיות) היא בקירוב בת 50 אלפיות. כיוון שיש 6400 אלפיות או 360 מעלות במעגל, חישוב פרופורציות מראה כי זווית זו היא בקירוב בת $\frac{50\cdot 360}{6400} \approx 2.8$ מעלות.

שאלה 14

מרחק עצירה של רכב הוא המרחק שעובר הרכב מהרגע שהנהג מחליט לבלום ועד לעצירתו המוחלטת של הרכב. מרחק זה תלוי באופי הכביש, במהירות התגובה של הנהג ובגורמים נוספים. בעזרת חישוב סטטיסטי (בכביש מישורי עם נהגים רבים) נקבעה הנוסחה המקורבת הבאה, המקשרת את מרחק העצירה d במטרים למהירות v של המכונית בקמ"ש, כך:

$$d=\frac{(2v+25)^2}{625}-1$$

א. חשבו את מרחק העצירה עבור מהירות של 60 קמ"ש.

ב. אם המהירות היא פי שניים מזו של הסעיף הקודם, פי כמה גדל מרחק העצירה?

ג. באיזו מהירות יש לנסוע כדי להספיק לבלום לפני מכשול בדרך אותו רואים במרחק של 24 מטרים?

ד. פשטו את הנוסחה ושרטטו סקיצה של גרף פונקציית העצירה.

ה. נמצא כי מרחק העצירה של משאית מסוג מסוים הוא $d=\frac{(v+5)^2}{100}$. האם יש מהירויות בהן מרחק העצירה של משאית ושל מכונית שווים?

ו. מכונית ומשאית נוסעות זו מול זו בכביש חד-מסלולי צר ומפותל. הנהגים הבחינו בהתנגשות המתקרבת כאשר המרחק הין הרכבים היה 60 מטרים. המכונית נסעה במהירות של 50 קמ"ש והמשאית במהירות 60 קמ"ש. האם יספיקו לעצור מבלי להתנגש?

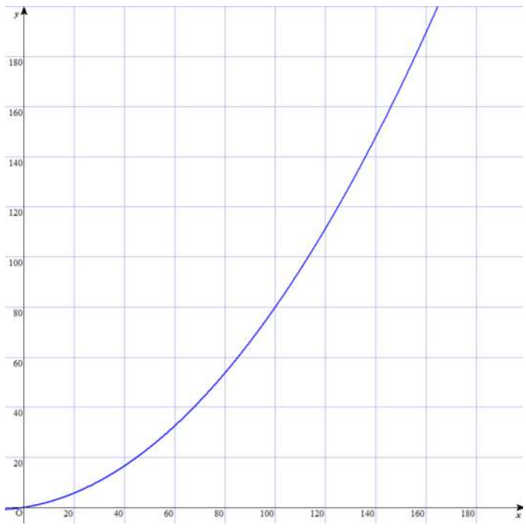
פתרונות והערות

א. 32.64 מטרים.

ב. כאשר המהירות גדלה פי שניים, מרחק הבלימה גדל בערך פי שלושה וחצי, למרק של 111.36 מטרים.

ג. במהירות קטנה מ- 50 קמ"ש.

ד. $d = 0.0064v^2 + 0.16v$



ה. במהירות 0 קמ"ש מרחקי העצירה של שניהן 0 מטרים. גם במהירות 8.3 קמ"ש מרחקי העצירה שווים.

ו. מרחק העצירה של המכונית צפוי להיות 24 מטרים, ומרחק העצירה של המשאית צפוי להיות 42.25 מטרים. לכן הן לא יספיקו לעצור לפני התנגשות כי סכום מרחקי העצירה גדול מ- 60 מטרים.

שאלה 15

השלט הבא נמצא באי מיאג'ימה ביפן.

צילם: א. הרכבי

התרגום לעברית של הכיתוב היפני והאנגלי הוא: "עשר דקות הליכה (7 דקות אם תרוצו ריצה קלה) לתחנת הרכבל".

א. נסו לאמוד את המרחק מהשלט לתחנת הרכבל. הסבירו כיצד הערכתם.

ב. יונית הולכת כל יום לבית הספר, הנמצא קילומטר וחצי מביתה. זמן ההליכה שלה הוא 25 דקות. כיצד היא תאמוד את המרחק לתחנת הרכבל?

ג. עומר מתאמן בקבוצת אתלטיקה קלה. הוא יודע שהמהירות שלו בריצה קלה היא כ- 7.5 קמ"ש. כיצד הוא עשוי להעריך את מרחק לתחנת הרכבל (בהנחה שהוא ירוץ באותו קצב)?

נאמר לנו כי שהשלט נכתב על ידי קוֹקי, צעיר יפני שבדק על עצמו כמה זמן אורכת ההליכה וכמה זמן אורכת הריצה. ענו על הסעיפים הבאים:

ד. אם מהירות ההליכה של קוֹקי היא 4 קמ"ש, מה מהירותו בריצה קלה?

ה. אם קוֹקי עובר קילומטר אחד בריצה קלה ב- 8 דקות, מה מהירות ההליכה שלו?

ו. כמה זמן ייקח לקוֹקי להגיע לתחנת הרכבל אם ילך מחצית הדרך וירוץ בריצה קלה במחצית השנייה?

ז. כמה זמן ייקח לקוֹקי להגיע לתחנת הרכבל אם ילך 3 דקות ואח"כ יעבור לריצה קלה?

ח. איזה חלק מהדרך עליו ללכת ואיזה חלק לרוץ על מנת להגיע ב- 8 דקות.

פתרונות והערות

א. תלמידים יכולים להתבסס על סוגים שונים של ידע כללי על מנת להעריך מהירות הליכה או מהירות ריצה קלה. בדרך כלל מהירות הליכה נעה בין 2 קמ"ש ל- 5 קמ"ש, ומהירות ריצה נעה בין 6 קמ"ש ל- 12 קמ"ש, תלוי בגיל ובכושר הגופני של ההולך ושל הרץ ותלוי במרחק (המהירות תרד כאשר המרחק גדול יותר). השיא העולמי לריצת 100 מטר הוא כ- 37 קמ"ש.

ב. $0.6 = 1.5 \times \frac{10}{25}$ - 600 מטרים.

ג. $0.817 = 7 \times \frac{7}{60}$ - כ- 800 מטרים.

ד. $5.7 = 4 \times \frac{10}{7}$ קמ"ש.

ה. מהירות הריצה שלו היא $7.5 = \frac{60}{8}$ קמ"ש, ולכן מהירות ההליכה שלו $5.25 = 7.5 \times \frac{7}{10}$ קמ"ש.

ו. מחצית הדרך בהליכה אורכת 5 דקות, ומחצית הדרך בריצה אורכת 3.5 דקות, ביחד 8.5 דקות.

ז. ב- 3 דקות יעבור 30% מהדרך. 70% הנותרים בריצה ייקחו לו 4.9 דקות. יחד 7.9 דקות.

ח. ניתן לפתור סעיף זה כבעיית פרופורציה. כבר ראינו בסעיף ו לעיל שכאשר יחס המרחקים בהליכה ובריצה הוא 1:1, הזמן הכולל הוא ממוצע הזמנים בהליכה ובריצה. במקרה זה יש לנו מצב של ממוצע משוקלל. 8 נמצא ב- "1/3 הדרך" בין 7 ל- 10, וזה צריך להיות היחס בין המרחקים, כלומר 1/3 דרך בריצה ו- 2/3 הדרך בהליכה. כמובן ניתן להגיע למסקנה הזאת גם בעזרת נוסחאות של מהירות/זמן/דרך.

חזרה לתוכן העניינים

שאלות לתלמידים מצטיינים

אלגברה - טכניקה בהקשר

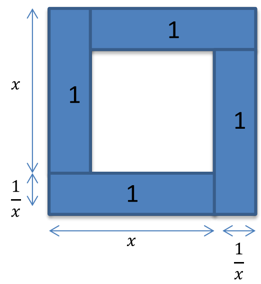
<u>שאלה 1</u>[16]

א. חשבו את הסכומים הבאים: $3+\frac{1}{3}$, $2+\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}$.

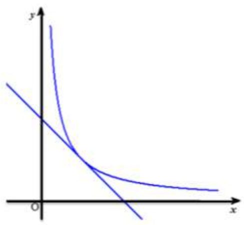
ב. הוכיחו, בעזרת אלגברה, כי עבור כל <u>מספר חיובי</u> סכום המספר וההופכי לו הוא תמיד גדול מ- 2 או שווה ל- 2.

ג. (אתגר למצטיינים בלבד) להלן ארבע הוכחות, כל אחת ניתנת בעזרת תמונה אחת. הסבירו כל הוכחה.

הוכחה 1

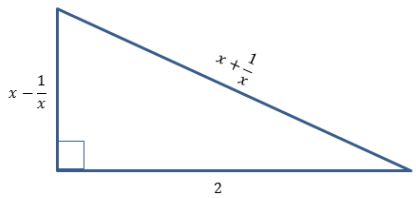


הוכחה 2



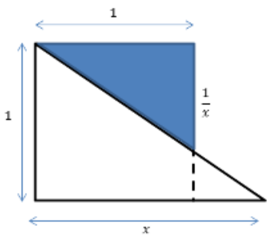
הוכחה 3

$x>1$



הוכחה 4

$x \geq 1$



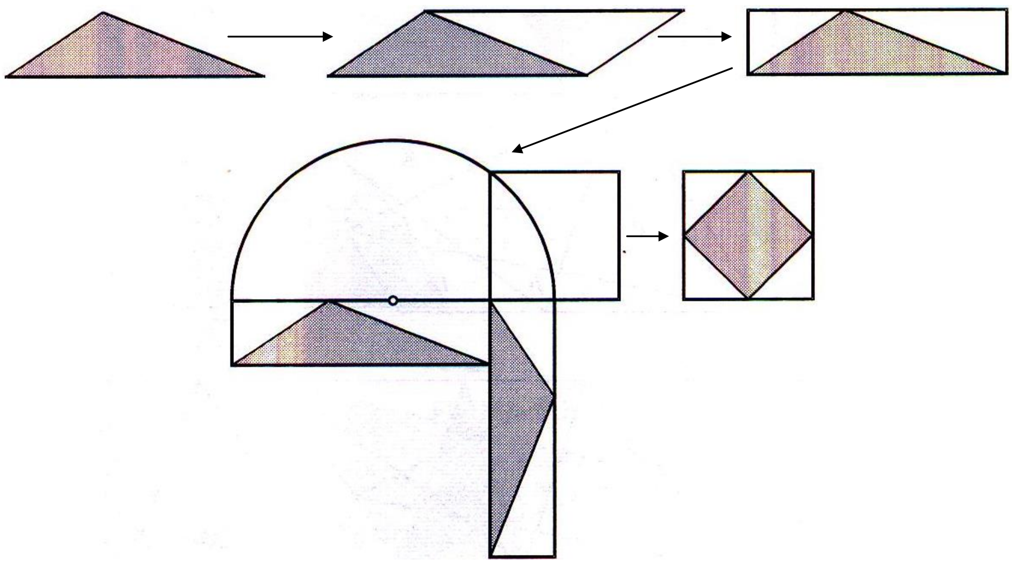
ד. עבור אלו ערכים של a, ו- b מתקיים כי $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=2$?

[16] בהשראת הספר:
<u>Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking</u> by <u>Roger B. Nelsen</u> (Oct. 1993).

גאומטריה

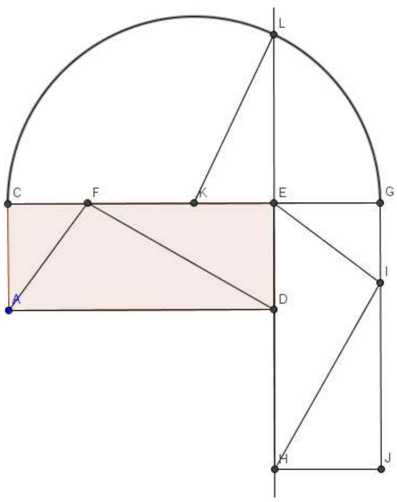
שאלה 2[17]

השרטוט הבא מתאר כיצד להפוך משולש לריבוע בעל אותו שטח בארבעה שלבים.



הסבירו את ההצדקה למעבר משלב לשלב וכיצד נשמר השטח משלב לשלב.

פתרונות והערות



במעבר הראשון משכפלים את המשולש באופן סימטרי ביחס לאחת הצלעות ומקבלים מקבילית. עובדה זו נובעת משוויון הזוויות המתחלפות. במעבר השני "מיישרים" את זוויות המקבילית ועוברים למלבן בעל שטח שווה (אותו בסיס ואותו גובה). יש לציין שאם במשולש המקורי אחת מזוויות הבסיס הייתה ישרה, המלבן היה מתקבל כבר בשלב הראשון. השלב הבא הוא מעט מורכב. משכפלים את המלבן, מסובבים אותו בזווית ישרה ומצמידים למלבן המקורי.

[17] בהשראת תרגיל מהספר:
Nelsen, R. & Alsina, C. (2006). *Math Made Visual*. Mathematical Association of America.

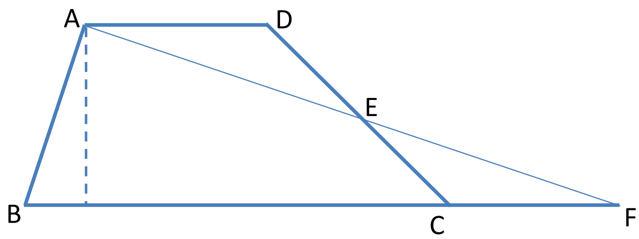
אם נסמן את צלעות המלבן AC=a, AD=b, הרי שקוטר חצי המעגל הוא a+b, והרדיוס $KL=\frac{a+b}{2}$. אורך הקטע EK:

$$EK=GK-GE=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$$

ממשפט פיתגורס, במשולש EKL נקבל: $EL^2=KL^2-EK^2=\frac{(a+b)^2-(b-a)^2}{4}=ab$, כלומר השטח של הריבוע שאורך צלעו EL שווה לשטח מלבן שאורכי צלעותיו a ו- b. בשלב האחרון מסומן מעוין (למעשה ריבוע) ששטחו חצי שטח הריבוע הנ"ל, ולכן גם חצי שטח המלבן, כלומר שטחו שווה בדיוק לשטח המשולש המקורי.

<u>שאלה 3</u>

בטרפז ABCD הנקודה E היא אמצע השוק DC, h הוא הגובה, AD=a ו- BC=b. האריכו את הקטע AE עד לנקודה F (חיתוכו עם המשך הבסיס BC).



א. הוכיחו כי המשולשים ADE ו- FCE חופפים.

ב. הראו כיצד ניתן לחשב את שטח המשולש ABF.

ג. השוו את שטח המשולש ABF עם שטחו של הטרפז ABCD.

<u>פתרונות והערות</u>

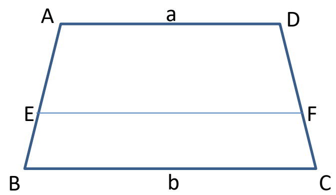
א. מתקיים כי: DE=EC (נתון כי E הוא אמצע הקטע DC), הזווית D במשולש ADE שווה לזווית C במשולש ECF (זוויות מתחלפות בין קווים מקבילים וקו חוצה), והזוויות E בשני המשולשים שוות כי הן קודקודיות. לכן לפי ז.צ.ז, המשולשים חופפים.

ב. כיוון שהמשולשים ADE ו- FCE חופפים, CF=a. לכן שטח המשולש ABF הוא $\frac{(a+b)h}{2}$.

ג. מהסתכלות על נוסחת שטח המשולש מהסעיף הקודם, רואים כי זאת גם הנוסחה לחישוב שטח הטרפז. ניתן לראות ששטח הטרפז ושטח המשולש זהים אם שמים לב כי שתי הצורות מורכבות מחלק משותף ומאחד משני המשולשים ADE ו- FCE שהם חופפים.

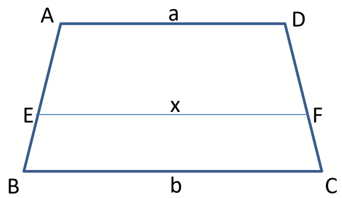
<u>שאלה 4</u>

נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, BCהוא באורך a יחידות ו- AD באורך b יחידות. מה אורך הקטע EF המקביל לשני בסיסי הטרפז, כך שהקטע יחלק אותו שלני טרפזים שווי שטח.



<u>פתרונות והערות</u>

גובה הטרפז הנתון הוא h והגבהים של הטרפזים EADF ו- EFBC הם h_1 ו- h_2 בהתאמה.



$$\frac{h_1(a+x)}{2}=\frac{h_2(b+x)}{2}=\frac{1}{2}\frac{h(a+b)}{2}$$

לכן,

$$\frac{h_1}{h}=\frac{(a+b)}{2(a+x)} \qquad \frac{h_2}{h}=\frac{(a+b)}{2(b+x)}$$

אך

$$\frac{h_1}{h}+\frac{h_2}{h}=\frac{h_1+h_2}{h}=1$$

לכן,

$$\frac{(a+b)}{2(a+x)}+\frac{(a+b)}{2(b+x)}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)(b+x)+(a+b)(a+x)}{2(a+x)(b+x)}=1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^2+2x(a+b)=2(a+x)(b+x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2+2ab+b^2+2ax+2bx=2ab+2ax+2bx+2x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

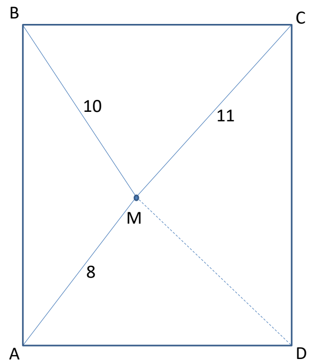
<u>שאלה 5</u>

העכבר מיקי מסתובב חופשי במחסן שצורתו מלבן. בכל אחת מארבע הפינות של המחסן (קדקודים של המלבן) יש לו מקום מסתור.

א. מאיזו נקודה במחסן הוא נמצא במרחק שווה מכל אחד ממקומות המסתור שלו?

ב. היכן במחסן הוא נמצא אם הוא קרוב באותה מידה לשניים ממקומות המסתור?

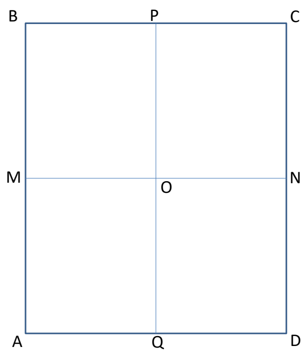
ג. ברגע נתון, מיקי נמצא בנקודה M כמסומן בשרטוט (השרטוט איננו לפי קנה מידה) בו רואים את המרחקים במטרים והוא מחליט לרוץ לנקודת מסתור העדיפה שלו D. כמה רחוק הוא ממנה?



<u>פתרונות והערות</u>

א. כאשר העכבר נמצא בנקודת החיתוך של שני האלכסונים הוא נמצא במרחק שווה מכל אחת מהפינות (אלכסוני המלבן שווים וחוצים זה את זה).

ב. כיוון שלא צוין לאילו שני מקומות מסתור העכבר קרוב באותה מידה, נפריד בין שלוש אפשרויות.



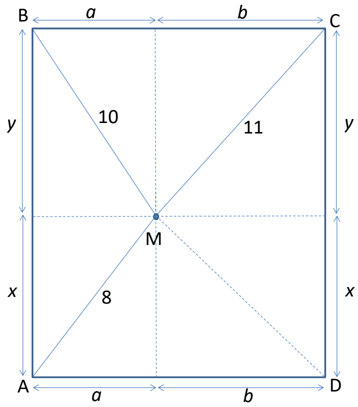
אם מקומות המסתור מיוצגים על ידי שני הקדקודים A ו- B, העכבר נמצא על הקטע MN (M ו- N אמצעי הצלעות AB ו- CD בהתאמה). זאת ניתן לראות כיוון שכל נקודה על הקטע MN יוצרת יחד עם הקדקודים A ו- B משולש שווה שוקיים. ניתן לנסח זאת במושגים של מקום גיאומטרי: האנך האמצעי לקטע הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן לשני קצותיו שווה.

אותו קטע MN מתאים גם לשני המסתורים C ו- D.

באופן דומה הקטע PQ מתאים לשני המסתורים B ו- C ולשני המסתורים A ו- D.

אם שני המסתורים מתאימים לקדקודים נגדיים במלבן, העכבר נמצא על האנך האמצעי לאחד מאלכסוני המלבן.

ג. כדי למצוא את האורך של הקטע MD, אפשר להיעזר בשרטוט הבא:



$$a^2 + y^2 = 10^2$$

$$b^2 + x^2 = u^2$$

$$a^2 + y^2 + b^2 + x^2 = 10^2 + u^2$$

אבל $a^2 + x^2 = 8^2$ וגם $b^2 + y^2 = 11^2$

לכן, ניתן גם לכתוב כי,

$$a^2 + y^2 + b^2 + x^2 = 11^2 + 8^2$$

ומכאן ש:

$$11^2 + 8^2 = 10^2 + u^2$$

כלומר,

$$u^2 = 11^2 + 8^2 - 10^2 = 85$$

רצוי להסב את תשומת לב התלמידים כי אורך הקטע MD נמצא מבלי שחישבנו את אורך הקטעים a, b, x, y. יתרה מזו – אורכים אלה בכלל לא נקבעים חד-ערכית בבעיה! את זאת אפשר להמחיש בעזרת הבנייה הבאה: נקצה תחילה את AB. הנקודה M נקבעת חד-ערכית (משפט חפיפה צ.צ.צ. במשולש ABM), C נקבעת חד-ערכית (משפט חפיפה "שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים" במשולש BCM). כלומר, יש אינסוף מלבנים אפשריים הנקבעים על ידי בחירה שרירותית של AB (עד גבול עליון של 18=10+8), אך בכולם לקטע MD יש אותו האורך.

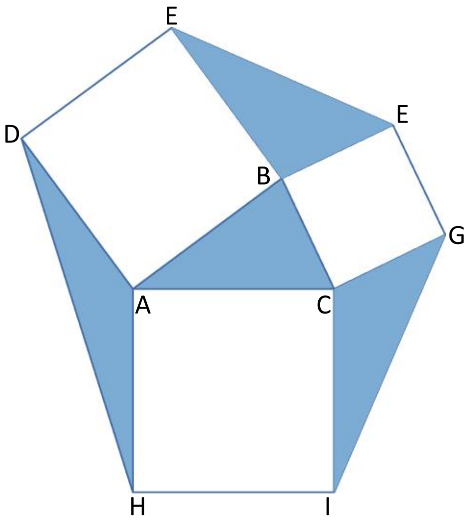
שאלה 6

במשולש כלשהו ABC בונים ריבועים על כל שלוש צלעותיו. שטח כל אחד משלושת המשולשים הנוצרים "בין" הריבועים שווה לשטח של המשולש הנתון. הוכיחו טענה זו.

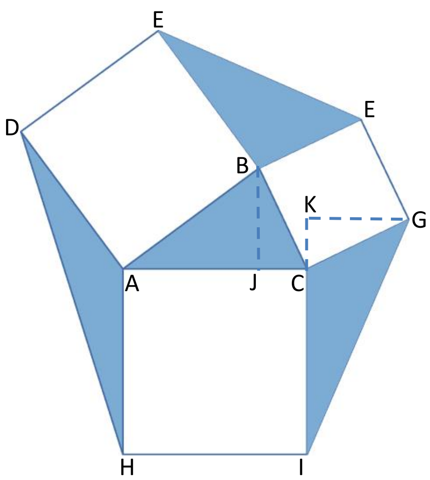
פתרונות והערות

השאלה הזאת מוכרת במקורות מסוימים בספרות כ"משפט קרוס". ניתן לתת את השאלה לתלמידים שעובדים בתוכנות של גיאומטריה דינמית כשאלה פתוחה, למשל "חקרו מה הקשר בין השטח של המשולש הנתון למשולשים שנוצרו", ולאחר שמגיעים להשערה לעבוד על ההוכחה.

המשפט אומר כי המשולשים ADH, ICG, ו- BEF הם שווים בשטחם למשולש הנתון ABC.



בשרטוט הבא רואים כי אפשר לחשב את שטח המשולש ABC על ידי מחצית מכפלת האורך של AC ב- BJ, ואת שטח המשולש CGI על ידי מחצית מכפלת האורך של CI ב- KG (גובה המשולש).



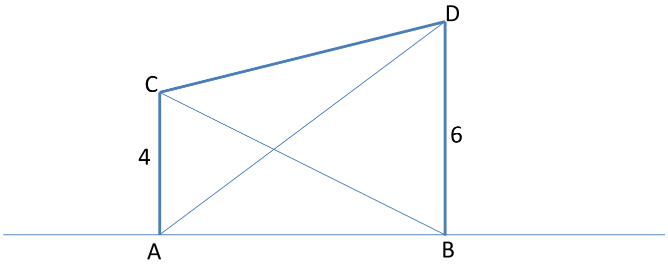
בנוסף CI=AC (צלעות של הריבוע ACIH). הזוויות BCJ ו- GCK שוות (כי שתייהן משלימות ל- 90° של הזווית BCK). BC=CG (צלעות של הריבוע BCGE). הזוויות JBC ו- KGC שוות (זווית שלישית במשולשים בהן שתי זוגות הזוויות האחרות שוות בהתאמה). לכן, המשולשים CBJ ו- KGC חופפים. לכן BJ=GK. מכאן שלמשולשים ABC ו- CGI יש אותו בסיס ואותו גובה, ולכן יש להם אותו שטח. בדרך דומה ניתן להוכיח את שיוויון השטחים עם המשולשים האחרים.

פרטים נוספים על משפט זה ניתן למצוא, למשל, ב-

http://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT190/Non-Member/ATM-MT190-16-16.pdf

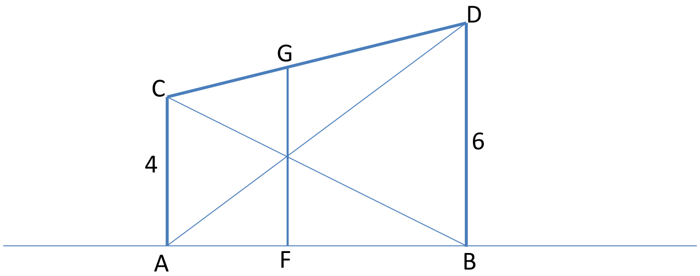
שאלה 7[18]

באתר בנייה העמידו שני עמודים AC ו- BD בגובה 4 מטרים ו- 6 מטרים (בהתאמה), וחיברו את הקצה העליון שלהם (ראה קטע CD בשרטוט). כמו כן חיברו בכבלים קצה עליון של מוט אחד עם הקצה התחתון



של המוט השני (קטעים AD ו- CB בשרטוט).

על מנת לחזק את כל המבנה, הוחלט להצמיד מוט תומך דרך נקודת המפגש של הכבלים, באופן הבא (קטע GF):



א. אמדו את גובה המוט התומך GF עבור מרחקים שונים בין המוטות הראשיים (כלומר, עבור אורכים שונים של AB).
ב. חשבו את אורך GF.
ג. הכלילו את התוצאה עבור טרפז כלשהו אשר בסיסיו הם באורכים a ו- b.

פתרונות והערות

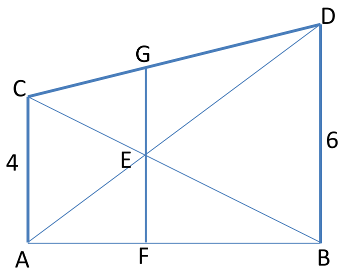
שאלה זו מתייחסת לחישוב האורך של הקטע המקביל לבסיסים בטרפז כלשהו ואשר עובר דרך נקודת המפגש של אלכסוניו. השאלה מאפשרת ליישם ולשלב ידע על דמיון משולשים ו/או על משוואות של קווים ישרים ומזמנת היכרות עם מושג חדש: ממוצע הרמוני בין שני מספרים. השאלה מתאימה לכיתה מקדמת כשאלת סיכום ושילוב נושאים.

א. רצוי שתלמידים ישרטטו דוגמאות שונות על נייר וינסו למדוד, כדי לקבל תחושה לגבי האורך של הקטע. תלמידים רבים ישערו כי האורך הוא 5 (הממוצע). בכיתות בהן יש נגישות לתוכנות בגיאומטריה דינמית רצוי לנסות מצבים בהם המרחק AB משתנה. תלמידים יוכלו להתרשם מניסיונות חוזרים כי האורך של

[18] במבוססת על פעילות 12 מתוך החוברת "על השתנות גיאומטרית וגרפים" מאת א. הרכבי ונ. הדס, הוצאת המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות, 1999, עמ' 64-68.

המוט התומך נראה קבוע, כלומר אינו תלוי במרחק שני המוטות הנתונים. על בסיס השערה זו ניתן לגשת לחישוב אורכו אשר תהווה הוכחה כי אכן האורך אינו משתנה.

ב.



בעזרת דמיון משולשים:

נמצא את האורך של GF בעזרת האורכים של שני הקטעים המרכיבים אותו GE ו-EF.

המשולשים ABC ו- EFB הם דומים (יש להם זווית אחת משותפת, וזווית שנייה שהיא ישרה). לכן ניתן לרשום את הפרופורציה הבאה:

$$\frac{FE}{4}=\frac{FB}{AB}$$

בעזרת אותם שיקולים ניתן להראות כי המשולשים ABD ו- AEF דומים, ולכן:

$$\frac{FE}{6}=\frac{FA}{AB}$$

אם חבר את שני הביטויים נקבל:

$$\frac{FE}{4}+\frac{FE}{6}=\frac{FB}{AB}+\frac{FA}{AB}$$

אך FB+FA=AB ולכן:

$$\frac{FE}{4}+\frac{FE}{6}=1$$

ומכאן ש FE=2.4

באותה דרך מחשבים שהקטע EG=2.4 ולכן אורך הקטע (המוט התומך) הוא 4.8

בעזרת משוואות של קווים ישרים:

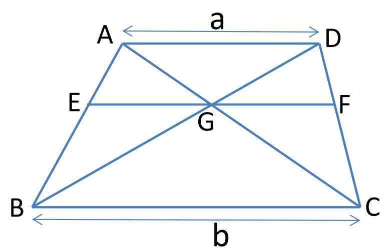
נמקם מערכת צירים כך שראשיתה, כלומר הנקודה (0,0), תהיה הנקודה A. הקטע AD יהיה על הישר שמשוואתו הוא מהצורה $y=ax$, בה a הוא השיפוע, כלומר $\frac{6}{AB}$. הקטע CB יימצא על ישר שמשוואתו $y=ax+b$, בה השיפוע הוא $\frac{-4}{AB}$, והחיתוך עם ציר ה- y הוא 4.

כעת ניתן למצוא את שיעורי הנקודה E שהיא נקודת החיתוך של שני הישרים:

$$y=\frac{-4}{AB}x+4 \qquad\qquad y=\frac{6}{AB}x$$

פתרון מערכת המשוואות הוא: $x=\frac{4AB}{10}$. גובה FE הוא שיעור ה- y של הנקודה E אותו מחשבים על ידי הצבה של ערך ה- x באחת המשוואות. ומקבלים 2.4

ג.



בעזרת דמיון זוגות המשולשים ABD, EBG ו- ABC, AEG מתקבל כי:

$$\frac{EG}{a}=\frac{EB}{AB}$$

$$\frac{EG}{b}=\frac{EA}{AB}$$

ולכן:

$$\frac{EG}{a}+\frac{EG}{b}=\frac{EB}{AB}+\frac{EA}{AB}=1$$

כלומר,

$$EG=\frac{ab}{a+b}$$

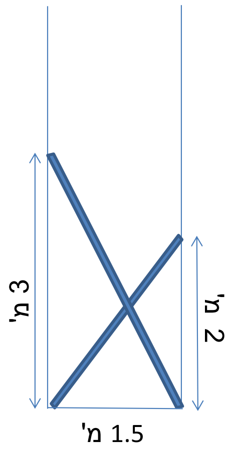
בדרך דומה מתקבל FG, לכן

$$EF=\frac{2ab}{a+b}$$

וזאת ההגדרה של הממוצע ההרמוני בין שני מספרים.

שאלה 8

בסמטה מסוימת ברוחב 1.5 מטרים, מונחים שני סולמות על הקירות, האחד נוגע בקיר בגובה שני מטרים מהקרקע והשני נוגע בקיר שממול בגובה 3 מטרים, באופן הבא:



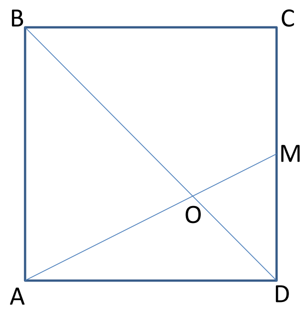
באיזה גובה מעל פני הקרקע הסולמות נוגעים זה בזה?

פתרונות והערות

מהסתכלות זהירה במצב הנתון עולה כי שאלה זו היא מאוד דומה לשאלה הקודמת (שאלה 34 לעיל). ולכן, הגובה אינו תלוי ברוחב הסמטה וניתן לחשב בשיטה זהה לזו שבתרגיל הקודם. הגובה הוא 1.2 מטרים.
תרגיל זה מיועד לזיהוי מצבים דומים וליישום שיטת החישוב למצב החדש.
נשים לב עוד כי גובה זה (1.2 מטרים) הוא בדיוק מחצית הממוצע ההרמוני של 2 ו- 3 (2.4). מתבקשת השאלה האם הקטע המקביל לבסיסי טרפז והעובר דרך מפגש האלכסונים תמיד נחצה על ידי מפגש האלכסונים לשני קטעים **שווים**? התשובה חיובית, ובכיתות מתאימות אפשר להתייחס לזה. ההוכחה פשוטה, ומתבססת על כך שיחס הפרופורציה בין צלעות מתאימות במשולשים דומים שווה ליחס בין הגבהים.

<u>שאלה 9</u>

בריבוע ABCD, M היא נקודת האמצע של הצלע CD ו- BD אלכסון הריבוע.



נוצרו ארבע צורות: שלושה משולשים (AOB ,AOD ,MOD) ומרובע אחד (BOMC).

אם שטח הריבוע הוא 1, מה שטחי ארבע הצורות הנ"ל?

<u>פתרונות והערות</u>

המשולשים MOD ו- ABO הם דומים (הזוויות סביב הנקודה O הן קודקודיות, ABD=MDO=45°). כיוון שבסיס המשולש MOD (MD) הוא באורך חצי מבסיס המשולש ABO (AB), היחס בין שטחיהם הוא 1 ל-4.

נסמן את ערך השטחים של הצורות באופן הבא:

a - השטח של MOD,

b - השטח של AOD,

c - השטח של ABO,

d - השטח של BOMC

נקבע כי שטח הריבוע הוא יחידה, לכן

$$a + b = \frac{1}{4}$$

$$c + b = \frac{1}{2}$$

אבל

$$c = 4a$$

לכן

$$a = \frac{1}{12}$$

מכאן ש,

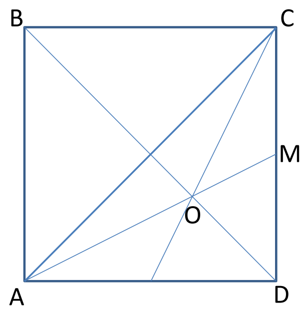
$$b = \frac{1}{6}$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$d = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$$

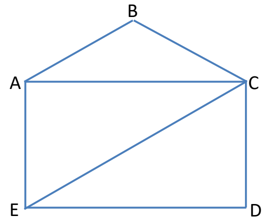
ניתן לפתור בעיה זו בעזרת משוואות של פונקציות קוויות, כך: נמקם מערכת צירים קרטזית כך שראשית הצירים היא הנקודה A. לפיכך, הקטע AM הוא על הישר $y = \frac{1}{2}x$, והקטע BD הוא על הישר $y = -x +$ 1. לפי זה שיעורי הנקודה O הם $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. כלומר, בסיס המשולש MOD הוא $\frac{1}{2}$ וגובהו הוא $\frac{1}{3}$ לכן שטחו $\frac{1}{12}$.
בדרך דומה ניתן לחשב את שטחם של המשולשים האחרים.

שיעורי הנקודה *O* מרמזים על מפגש התיכונים של איזשהו משולש, ואכן אם נתבונן במשולש ACD



הנקודה O היא מפגש התיכונים (AM תיכון, ותיכון נוסף מתלכד עם אלכסון הריבוע BD). כידוע, מפגש התיכונים במשולש חותך כל תיכון ביחס של 1:2 (שליש ושני שלישים). מידע זה הוא יכול להיות אף הוא נקודת מוצא לחישוב השטחים.

שאלה 10



ABCE טרפז שווה שוקיים. ACDE מלבן. AB=10 ו- EC=20.

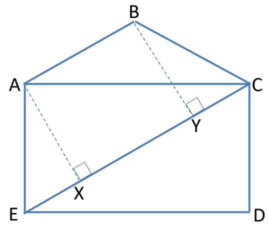
א. חשבו את אורכו של AE.

ב. חשבו את היקף המחומש ABCDE.

ג. חשבו את שטח המחומש ABCDE.

פתרונות והערות

א.



בבניית עזר רואים כי EX=YC=5. המשולשים ACE ו- XAE הם דומים (שניהם ישרי זווית ויש להם זווית משותפת). לכן,

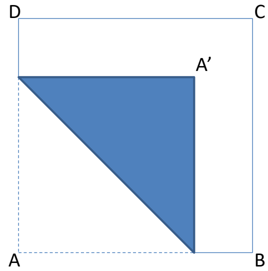
$$\frac{AE}{5} = \frac{20}{AE} \Rightarrow AE = 10$$

ב. ההיקף הוא AB+BC+CD+DE+AE=$40 + 10\sqrt{3}$. הסבר: AB=10 (נתון), BC=10 (כי הטרפז הוא שווה שוקיים ומצאנו בסעיף הקודם כי AE=10), CD=10 (צלע של מבלן מקבילה ל- AE), ED=$10\sqrt{3}$ (לפי משפט פיתגורס), AE=10 (לפי הסעיף הקודם).

ג. השטח של המחומש הוא סכום השטחים של המלבן ושל המשולש ABC. שטח המלבן הוא ED×AE=$100\sqrt{3}$. שטח המשולש הוא בסיס כפול גובה לחלק לשתיים. הבסיס נתון ($10\sqrt{3}$) ואת הגובה יש לחשב בעזרת משפט פיתגורס (ועל סמך העובדה שהמשולש הוא שווה שוקיים). לפי משפט פיתגורס, ריבוע הגובה הוא $10^2 - (5\sqrt{3})^2 = 25$, לכן הגובה הוא 5. לכן שטח המשולש הוא $25\sqrt{3}$.
לבסוף, שטח המחומש הוא: $125\sqrt{3}$.

שאלה 11

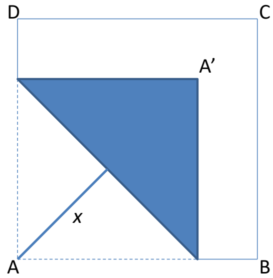
נייר בצורת ריבוע אשר שטחו 9 יחידות שטח הוא לבן מצד אחד וצבעוני בצד השני. קיפלו את הפינה A כך שהיא מונחת על האלכסון AC, כפי שנראה בשרטוט:



ידוע כי השטח הנראה לעין (המחומש המורכב מה- L הלבנה ומהמשולש הצבעוני) הוא חצי לבן וחצי צבעוני. מה המרחק של A מקו הקיפול?

פתרונות והערות

הריבוע המקורי מורכב משלוש צורות: ה- L, המשולש הצבעוני, והמשולש החסר עקב הקיפול. ידוע כי שלוש הצורות הן בעלות אותו שטח, לכן כל אחת היא 3 יחידות שטח. לכן הצלעות השוות של המשולש הצבעוני הן באורך $\sqrt{6}$ ואורך קו הקיפול הוא $\sqrt{12}$. נסמן ב- x את המרחק מ- A לקו הקיפול, כלומר אורך הקטע המאונך המסומן:

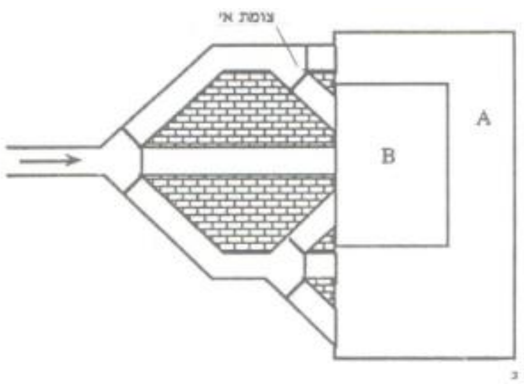


x הוא הגובה של משולש שבסיסו $\sqrt{12}$ ושטחו 3, לכן $x=\sqrt{3}$.

הסתברות

<u>שאלה 12</u>[19]

לפני שנים רבות חי מלך ולו בת יפיפייה. המלך הועיד את בתו לנסיך הממלכה השכנה, אך בת המלך אהבה עלם מפשוטי העם. המלך החליט להשאיר לגורל ולחוכמתה של בתו את ההחלטה וקבע כדלהלן: אם העלם יגיע למקום הימצאותה של הנסיכה הוא יזכה בה, אחרת ייטרף על ידי נמר. לשם כך המלך הציג לבתו את המפה של הבניין הבא (ראו תרשים למטה) ואמרה לה כי עליה להחליט האם לעמוד באולם A או באולם B. לאחר החלטתה, יועמד נמר באולם השני. העלם יעבור במבוך, אם יגיע לנסיכה, יזכה בה, אחרת...

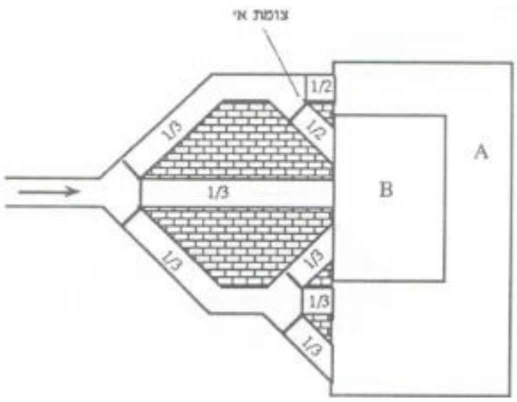


היכן כדאי לנסיכה לעמוד?

<u>פתרונות והערות</u>

בעיה זו ממחישה את השימוש במודל העץ כאשר מודל זה מומחש על בחירת מסלולים שווי הסתברות.

להלן המפה של הבניין ובה מסומנות כל ההסתברויות:



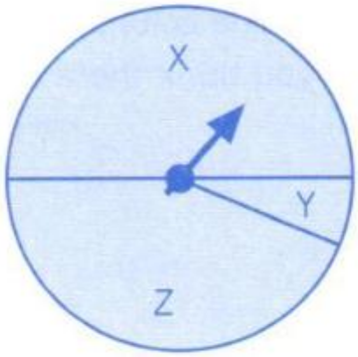
ההסתברות להגיע לאולם A היא: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{14}{36}$.

[19] תרגיל 7 (עמוד 45) בחוברת "פרקי מתמטיקה: הסתברות" – מהדורה ניסויית, מאת נ. הדס, א. הרכבי ורינה מירסקי, הוצאת מכון ויצמן למדע, 1991.

ההסתברות להגיע לאולם B היא: $\frac{22}{36} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. לכן כדאי לנסיכה לבחור לעמוד באולם B.

שאלה 13[20]

מסובבים את המחוג שבשעון זה פעמיים:



לאיזה מאורע יש הסתברות גדולה יותר:

- המחוג נעצר באזור X בפעם הראשונה ואינו נעצר באזור X בפעם השנייה
- המחוג נעצר באזור Y בפעם הראשונה ואינו נעצר באזור Y בפעם השנייה.

[20] בהשראת תרגיל 86 מתוך הספרון:
Maths Medicine from Professor Smudge, Dexter Graphics, London (2000)

אלגברה – חזקות ושורשים

שאלה 14

תנו אומדן לערך הביטוי $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$.

א. הוכיחו כי ערך הביטוי הוא מספר שלם.

ב. בנו ביטוי דומה עם מספרים שונים, כך שערכו הוא מספר שלם והוכיחו זאת.

פתרונות והערות

א. כיוון ש $7^2 = 49$ הקירוב הראשון שניתן לעשות הוא ש- $\sqrt{48}$ הוא מעט קטן מ-7. מכאן ש- $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ הוא מעט קטן מ- $\sqrt{14}$. באופן דומה ניתן לאמוד כי $\sqrt{7-\sqrt{48}}$ הוא "קצת" יותר גדול מאפס. לכן, סכום שני האיברים הוא קרוב ל- 4.

ב. על מנת לברר מה הערך המדויק של הביטוי, נסמן אותו ב- A ונחשב:

$$A^2 = \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^2$$

$$= \left(7+\sqrt{48}\right)+2\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}+\left(7-\sqrt{48}\right) = 14+2\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}$$

מכאן נקבל ש:

$$A^2-14 = 2\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}} = 2\sqrt{\left(7+\sqrt{48}\right)\left(7-\sqrt{48}\right)} = 2\sqrt{49-48} = 2$$

מכאן נסיק כי $A^2 = 16$, וכיוון ש- A חיובי, נסיק כי $A = 4$.

ג. נעקוב אחרי ההוכחה הנ"ל בעזרת משתנים:

$$A = \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

$$A^2 = 2a+2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

$$A^2-2a = 2\sqrt{a^2-b}$$

A - הערך של הביטוי יהיה שלם אם יתקיימו שני תנאים:

a^2-b ריבוע של מספר שלם, שנסמן ב- p^2.

$A^2=2a+2p$ גם הוא ריבוע של מספר שלם.

בביטוי בסעיף א, נתון כי: $b=48$ $p=1$, $a=7$,

נדגים עוד אפשרויות. תחילה עוד ביטוי שבו $p=1$. נבחר $A^2=2a+2p=36$ ונקבל $a=17$ $b=$,

288, ואכן מתקיים כי $\sqrt{17+\sqrt{288}}+\sqrt{17-\sqrt{288}}=6$

על מנת להראות את הכלליות, נדגים עוד שני ביטויים עם ערכים שונים של p.

הפרמטרים: $p=2,\ A^2=16$ נותנים $a=6, b=32$, ואכן $\sqrt{6+\sqrt{32}}+\sqrt{6-\sqrt{32}}=4$

הפרמטרים: $p=3, A^2=36$ נותנים $a=15, b=216$,

ואכן $\sqrt{15+\sqrt{216}}+\sqrt{15-\sqrt{216}}=6$.

שאלות משלבות

שאלה 15

בונים משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ בעזרת קוביית משחק הוגנת אשר על שש פאותיה רשומים המספרים: 3- ,3 ,2- ,2 ,1- ,1. מטילים את הקובייה שלוש פעמים: מציבים את תוצאת ההטלה הראשונה ב- a, את תוצאת ההטלה השנייה ב- b, ואת תוצאת ההטלה השלישית ב- c. למשל, אם ההטלות הן (לפי הסדר), 3, 1-, 3, תתקבל המשוואה הבאה: $3x^2 - x + 3 = 0$.

הוכיחו שההסתברות שלמשוואה המתקבלת יהיו שני פתרונות היא גדולה מ- $\frac{1}{2}$.

פתרונות והערות

לפני נתוני הבעיה, יש שש אפשרויות לכל אחת מהמקדמים, לכן יש בסך הכול $6^3 = 216$ משוואות אפשריות. לא יעיל לבדוק את כולן. למשוואה יהיו שני פתרונות, כאשר $b^2 - 4ac > 0$. b^2 תמיד חיובי, ו- $-4ac$ חיובי כאשר ל- c ול- a סימנים שונים (אחד חיובי ואחד שלילי). ל- c סימן שונה מהסימן של a בהסתברות $\frac{1}{2}$ כי לכל ערך אפשרי של a יש שלושה ערכים של c שהם בעלי סימן הפוך, ובמצבים האלה יש למשוואה שני פתרונות. יש הסתברות גדולה מ- 0 שיהיו שני פתרונות גם אם ל- a ול- c אותו סימן, למשל כאשר $a = 1$, $c = 2$ ו- $b = 3$, מתקבל $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 > 0$ ולכן ההסתברות לכך ש- $b^2 - 4ac > 0$ היא תמיד יותר גדולה מ- $\frac{1}{2}$.

שאלה 16

ברשותכם מטבע מיוחד שעל צד אחד שלו מסומן 1 ועל צדו האחר 1-. בונים פונקציה ריבועית מהצורה $f(x)=a(x-p)^2+k$ באופן הבא: מטילים את המטבע שלוש פעמים. תוצאת ההטלה הראשונה קובעת את הערך של a (1 או 1-), תוצאת ההטלה השנייה קובעת את הערך של p, ותוצאת ההטלה השלישית קובעת את הערך של k .

א. מה ההסתברות שגרף הפונקציה המתקבלת חותך את הישר $x=5$?

ב. מה ההסתברות שגרף הפונקציה המתקבלת חותך את הישר $y=-\frac{1}{2}$?

פתרונות והערות

א. הפונקציה הריבועית מוגדרת עבור כל המספרים ובפרט עבור 5, לכן הגרף שלה תמיד יחתוך את הישר $x=5$ בנקודה $(5,f(5))$ ולכן ההסתברות היא 1.

ב. כל מקדם יכול לקבל שני ערכים בלבד, לכן מתקבלות 8 פונקציות ריבועיות אפשרויות שהן שוות הסתברות. מתוך אפשרויות אלה, יש פונקציות בעלות מקסימום (הגרף של הפרבולה "פונה כלפי מטה") ויש פונקציות בעלות מינימום (הגרף של הפרבולה "פונה כלפי מעלה"). כל פרבולה עברה הזזה של יחידה אחת ימינה או שמאלה והזזה של יחידה אחת למעלה או למטה. הפרבולות שחותכות את הישר $y=-\frac{1}{2}$ הן: שתי הפרבולות בעלות מקסימום שעברו הזזה כלפי מעלה ושתי הפרבולות בעלות מינימום שעברו הזזה כלפי מטה (הן ירדו יחידה אחת, ולכן חותכות את הישר $y=-\frac{1}{2}$). ארבע הפרבולות האחרות לא חותכות את ציר ה- x. לכן, ההסתברות היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 17

בונים פונקציה ריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ בעזרת קוביית משחק הוגנת אשר על שש פאותיה רשומים המספרים: 2 ,1 ,0 ,0 ,1- ,2-. מטילים את הקובייה שלוש פעמים: מציבים את תוצאת ההטלה הראשונה ב- a, את תוצאת ההטלה השנייה ב- b, ואת תוצאת ההטלה השלישית ב- c. לדוגמה אם תוצאות ההטלות היו 2- ,0 ,2-, הפונקציה המתקבלת היא $f(x) = -2x^2 - 2$.

א. מה ההסתברות שהפונקציה המתקבלת תהייה ריבועית?

ב. מה ההסתברות שהפונקציה המתקבלת תהייה קווית?

ג. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה ישר מקביל לציר ה- x?

ד. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה ישר מקביל לציר ה- x, אם ידוע שהפונקציה היא קווית?

ה. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה פרבולה בעלת מקסימום?

ו. (אתגר) מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה פרבולה בעלת מקסימום, אם ידוע שהגרף הוא פרבולה?

ז. (אתגר) מה ההסתברות שגרף הפונקציה עובר בראשית הצירים אם ידוע שאיננו קו ישר?

ח. (אתגר) מה ההסתברות שלגרף הפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 1$ אם ידוע שהפונקציה היא ריבועית?

פתרונות והערות

במצב המתואר יש $6^3 = 216$ פונקציות אפשריות. דרך אחת לענות על השאלות מתבססת על מניית התוצאות ה"רצויות" וחישוב חלקן היחסי. אך נשים לב שבמקרים רבים (אולי בכולם) ניתן למקד את ההסתכלות באחד או שניים מן המקדמים בלבד.

א. הפונקציה היא ריבועית אם המקדם של x^2 איננו 0. 4 מתוך 6 הטלות אינן 0, ולכן ההסתברות היא $\frac{2}{3}$.
בפתרון זה התעלמנו לחלוטין מערכי שני המקדמים האחרים כי אין להם השפעה על היות הפונקציה ריבועית או לא. בשפה מתמטית נאמר שהמאורע "הפונקציה היא ריבועית" הוא בלתי תלוי בערכי b ו- c.

ב. המאורע ש"הפונקציה היא לינארית" הוא המשלים של המאורע "פונקציה ריבועית", לכן ההסתברות שלו היא $\frac{1}{3}$.

ג. גרף הפונקציה הוא ישר מקביל לציר ה- x אם הן המקדם של x^2 והן המקדם של x שווים ל- 0 והמקדם החופשי צריך להיות שונה מ- 0 (שכן גרף הפונקציה $f(x) = 0$ מתלכד עם ציר ה- x ולכן איננו מקביל לו. שלושת המאורעות $a = 0$, $b = 0$ ו- $c \neq 0$
הם בלתי תלויים (כי הם תוצאה של הטלות מטבע שונות), ולכן ההסתברות היא $\frac{2}{27} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

ד. בחישוב ההסתברות המותנית אנחנו מצמצמים את התוצאות האפשריות לאלה שבהן $a = 0$ והתנאי הוא $b = 0$ ו- $c \neq 0$ וההסתברות היא $\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$.

ה. גרף הפונקציה הוא פרבולה בעלת מקסימום אם $a < 0$. יש שתי אפשרויות כאלה מתוך שש אפשרויות שוות הסתברות, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{3}$.

ו. מבין ארבע התוצאות האפשריות עבור a, בשתיים מהן מתקיים $a < 0$, ולכן ההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$.

ז. הן כאשר $a = 0$ והן כאשר $a \neq 0$ גרף הפונקציה תעבור דרך ראשית הצירים כאשר $c = 0$, וההסתברות לכך היא $\frac{1}{3}$.

ח. לגרף של פונקציה ריבועית יש נקודת קיצון ב- $x = \frac{-b}{2a}$ ($a \neq 0$). שני צירופים נותנים $\frac{-b}{2a} = 1$ והם $a = 1$, $b = -2$ ו- $a = -1$, $b = 2$. ההסתברות של $a = 1$ בהינתן ש- $a \neq 0$ היא $\frac{1}{4}$. ההסתברות של $b = -2$ היא $\frac{1}{6}$. ההסתברות שיתרחשו שני המאורעות הבלתי תלויים האלה ($a = 1$, $b = -2$) היא מכפלת ההסתברויות, כלומר $\frac{1}{24}$. זאת גם ההסתברות של האפשרות השנייה ($a = -1$, $b = 2$). מאורעות אלה זרים וכן ההסתברות לנקודת קיצון ב- $x = 1$ היא $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$.

שאלה 18

בונים שתי פונקציות אקראיות מהצורה $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=sx^2+tx+u$ באופן הבא. על פאות של קובייה הוגנת מופיעים המספרים 2 ,1 ,0 ,0 ,1- ,2-. מטילים את הקובייה שש פעמים, כל פעם מגרילים את אחד המקדמים של אחת הפונקציות. לדוגמה אם תוצאות שלוש ההטלות הראשונות היו ,2- 0, 2-, הפונקציה המתקבלת היא $f(x)=-2x^2-2$.

א. מה ההסתברות ששתי הפונקציות המתקבלות יהיו פונקציות ריבועיות?

ב. מה ההסתברות שפונקציה אחת תהייה לינארית ואחת ריבועית?

ג. מה ההסתברות שהגרפים של שתי הפונקציות לא תהייה אף נקודה משותפת אם ידוע ששניהם קווים ישרים?

ד. מה ההסתברות שלשתי הפונקציות תהייה נקודה משותפת על ציר ה- y?

פתרונות והערות

א. כל פונקציה היא ריבועית אם המקדם של x^2 איננו 0, וזה מתרחש בהסתברות $\frac{2}{3}$ (4 תוצאות מתוך 6 תוצאות בלתי תלויות). שתי הפונקציות בלתי תלויות, ולכן ההסתברות ששתיהן תהיינה ריבועיות היא $(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$.

ב. יש שתי אפשרויות למאורע הזה: הראשונה לינארית והשנייה ריבועית, או להיפך. מאורעות אלה הם שווי הסתברות. ההסתברות של כל אחד מהם היא מכפלת ההסתברויות: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$, וההסתברות הכוללת היא $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$.

ג. אם ידוע ששני הגרפים הם קווים ישרים, הרי שהמקדמים של x^2 בשתי הפונקציות $(a,$ ו- $s)$ שווים ל- 0. לשתי פונקציות לינאריות אין נקודות משותפות אם יש להן שיפועים שווים ונקודות חיתוך שונות עם ציר ה- y, כלומר $b = t$ $u \neq c$,. על מנת לחשב את ההסתברות של $b = t$ ניעזר בטבלה בה מסומנים המקרים בהן זה קורה:

t / b	-2	-1	0	0	1	2
-2	+					
-1		+				
0			+	+		
0			+	+		
1					+	
2						+

אם כן ההסתברות של $b = t$ היא $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$. באופן דומה נמצא כי ההסתברות של $u \neq c$ היא $\frac{7}{9}$, שכן המאורעות "שני מקדמים מסוימים הם שווים" ו- "שני מקדמים מסוימים הם שונים" הם מאורעות משלימים. המאורעות $b = t$ ו- $u \neq c$ הם בלתי תלויים, ולכן ההסתברות ששניהם יתרחשו היא מכפלת ההסתברויות: $\frac{14}{81} = \frac{7}{9} \times \frac{2}{9}$.

ד. החיתוך של פונקציה עם ציר ה-y הוא בנקודה $(0, f(0))$. אם כן, התנאי הוא $f(0) = g(0)$, ששקול לתנאי $c = u$. ראינו בסעיף הקודם שההסתברות לכך היא $\frac{2}{9}$. יש לשים לב שההסתברות לא תלויה בערכים של המקדמים האחרים, ובפרט לא משתנה אם מוסיפים מידע לגבי הגרפים - מי מהם ישר ומי מהם פרבולה.

שאלה 19

א. יוני רוצה לבנות משולש שווה שוקיים בו סכום השורשים של אורכי שתי צלעות שווה לשורש של הצלע השלישית. האם ניתן לבנות משולש כזה? נמקו.

ב. כעת יוני מבקש לבנות משולש שאיננו שווה שוקיים, ושבו יש צלע ששורש אורכה שווה לסכום השורשים של אורכי שתי הצלעות הנותרות. האם ניתן לבנות משולש כזה? נמקו.

פתרונות והערות

א. שאלה זו דורשת: א) קריאה זהירה של התנאים ובדיקת המקרים האפשריים, ב) תרגום המקרים האפשריים למשוואות, ג) פתרון המשוואות ו-ד) פירוש התוצאות על פי שיקולים גיאומטריים. יש שני מצבים אפשריים:

- סכום שורש אורך שוק ושורש אורך הבסיס שווה לשורש אורך השוק השנייה: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}$
- סכום השורשים של אורכי השוקיים שווה לשורש אורך הבסיס: $\sqrt{a}+\sqrt{a}=\sqrt{b}$

במקרה הראשון, $\sqrt{b}=0 \Rightarrow b=0$ ולכן לא קיים משולש.

במקרה השני, $2\sqrt{a}=\sqrt{b} \rightarrow 4a=b$ וגם במקרה זה אינו קיים משולש כי במשולש כלשהו סכום האורכים של כל שתי צלעות בו גדול מהאורך של הצלע השלישית, ואילו במקרה זה אורך הבסיס גדול פי שניים מסכום שתי הצלעות השוות.

ב. המשולש שונה צלעות ולכן צריך להתקיים ש- $\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a\neq b\neq c$. מהעלאת שני האגפים בריבוע מתקבל השוויון $c=(a+b)+2\sqrt{ab}$. כלומר צלע c ארוכה יותר מסכום אורכי הצלעות a ו- b, וזה לא יתכן.

חזרה לתוכן העניינים