פתרון בגרות מועד חורף 2019 שאלון 35481 (804)

1)

בפיצרייה "נפולי" המחיר של פיצה משפחתית גבוה פי 3 מן המחיר של פיצה אישית.

בפיצרייה הכריזו על מבצע:

10% הנחה על קניית פיצה אישית,

20% הנחה על קניית פיצה משפחתית.

תלמידי שכבה י"א קנו 63 פיצות במבצע, חלקן אישיות וחלקן משפחתיות.

נתון כי מספר הפיצות המשפחתיות היה גדול פי 2.5 ממספר הפיצות האישיות.

תלמידי שכבה י"א שילמו על הפיצות 3,477.6 שקלים סך הכול.

א. חשב את המחיר המקורי של פיצה אישית, ואת המחיר המקורי של פיצה משפחתית (המחירים שלפני ההנחה).

ב. לאחר שבוע הכריזו על מבצע אחר:

מי שישלם את המחיר המקורי בעבור שתי פיצות אישיות, יקבל פיצה אישית שלישית חינם.

כמה פיצות אישיות אפשר לקנות במבצע הזה תמורת 1,232 שקלים (כולל הפיצות שהתקבלו בחינם)?

פתרון:

כדי לעבוד בצורה הטובה ביותר נבנה טבלה שתייצג לנו את הסיפור שבשאלה.

הדבר הראשון שנמלא יהיה כמות הפיצות האישיות והמשפחתיות עם הנחה שהתלמידים קנו. ניתן לנו שסה"כ הם קנו 63 פיצות ומספר המשפחתיות גדול פי 2.5 מהאישיות. נוכל לסמן את כמות האישיות בX והמשפחתיות ב2.5X . נשתמש במשוואה כדי למצוא את כמות הפיצות האישיות והמשפחתיות סה"כ שהם קנו.

$$X + 2.5X = 63$$
$$3.5X = 63$$
$$X = 18$$

לכן הם קנו 18 פיצות אישיות ו45 משפחתיות.

הדבר הבא שיופיע בטבלה הוא מחירי הפיצות לפני ההנחה ואחרי ההנחה.

נתחיל עם המחיר לפני ההנחה- נסמן את מחיר הפיצה האישית כP ובגלל שנתון לנו שהמחיר של הפיצה המשפחתית הוא פי 3 מהאישית , נסמן את מחיר הפיצה המשפחתית כ3P .

הדבר האחרון שנוסיף לטבלה הוא מחיר הפיצות לאחר ההנחה- נתון לנו שפיצה אישית מקבלת הנחה של 10% ולכן מחירה החדש יהיה רק 90% מהמחיר לפני ההנחה ככה שמחירה הוא 0.9P . הפיצה המשפחתית מקבלת הנחה של 20% לכן מחירה החדש יהיה רק 80% מתוך המחיר הקודם ככה ש $2.4P = 0.8\cdot 3P$

נכניס את כל הנתונים האלו לטבלה שלנו :

	מחיר ליחידה	כמות	סה"כ
פיצה אישית לפני הנחה	P		
פיצה משפחתית לפני הנחה	3P		
פיצה אישית אחרי הנחה	0.9P	18	$18\cdot 0.9P = 16.2P$
פיצה משפחתית אחרי הנחה	2.4P	45	$45\cdot 2.4P = 108P$

א. בעזרת הטבלה והנתון האחרון שניתן לנו, שהתלמידים שילמו 3477.6 ₪ סה"כ. ונמצא את מחירי הפיצות.

$$108P + 16.2P = 3477.6$$
$$124.2P = 3477.6$$
$$P = 28$$

לכן המחיר לפני הנחה של פיצה אישית הוא 28 ₪ ושל פיצה משפחתית $3P = 3\cdot 28 = 84$ ₪

ב. מצאנו בסעיף הקודם את מחיר הפיצות לפני ההנחה, בנוסף ניתן לנו בסעיף זה שעל שתי פיצות אישיות במחיר לפני ההנחה נקבל אחת חינם $2\cdot 28 = 56$. כלומר 3 פיצות אישיות ב56 ₪ . לכן

אם נחלק 56 ב3 נגלה כמה כל פיצה אישית שווה אחרי המבצע החדש : $\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

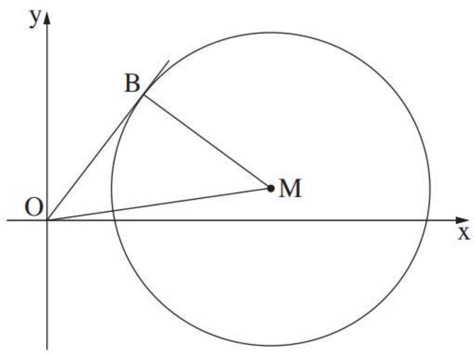
עכשיו שיש לנו כמה כל פיצה אישית שווה במבצע החדש, נוכל לחלק את המחיר שניתן לנו, 1232

₪ במחיר לפיצה אישית ונקבל את כמות הפיצות שנוכל לקנות ככה.

$$\frac{1232}{18\frac{2}{3}}=66$$

סה"כ 66 פיצות.

2)



בציור שלפניך נתון מעגל שמרכזו M .

ישר העובר בראשית הצירים משיק למעגל בנקודה $B(3,4)$.

חיברו את מרכז המעגל, M , עם ראשית הצירים, O .

נתון: משוואת הישר OM היא $y=\frac{1}{7}x$.

א. מצא את משוואת הישר BM .

ב. מצא את משוואת המעגל.

המשך הקטע BM חותך את המעגל בנקודה C .

ג. מצא את שטח המשולש OBC .

העבירו מעגל נוסף כך ש־ OM הוא קוטר שלו.

ד. האם המרכז של המעגל הנוסף נמצא בתוך המעגל שמרכזו M , עליו או מחוצה לו? נמק ופרט את חישוביך.

פתרון:

א. כדי למצוא את BM נצטרך שיפוע ונקודה. הנקודה B ניתנה לנו לכן כל מה שנצטרך זה למצוא את השיפוע. אנחנו יודעים שמשיק בנקודת ההשקה למעגל מאונך לרדיוס המגיע לאותה נקודה. לכן אם נמצא את שיפוע המשיק OB נמצא גם את שיפוע BM (נזכור ששיפועים שמאונכים זה לזה הם נגדיים והופכיים אחד לשני).

נמצא את שיפוע OB בעזרת הנקודה B וO , כפי שידוע B נתונה וO על פי השרטוט נמצאת בראשית הצירים כלומר שיעורה הוא (0,0).

$$M_{OB}=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}=\frac{4}{3}$$

לכן שיפוע BM הוא $-\frac{3}{4}$

נמצא את משוואת BM בעזרת B והשיפוע שמצאנו.

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}+4$$
$$y=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4}$$

ב. כדי למצוא את משוואת המעגל נצטרך למצוא את אורך הרדיוס ואת מרכז המעגל M.

מצאנו את משוואת BM בסעיף הקודם ובנוסף ניתן לנו משוואת OM, נוכל למצוא את חיתוך שתי המשוואות אחת עם השניה, החיתוך הוא M.

$$\frac{1}{7}x=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{4}$$
$$\frac{25}{28}x=6\frac{1}{4}$$
$$x=7$$

את שיעור הx שקיבלנו של M נציב באחד משני הישרים למציאת שיעור הy .

$$y=\frac{1}{7}\cdot 7=1$$
$$M(7,1)$$

עכשיו נמצא את הרדיוס בעזרת הנקודה M שאת שיעוריה בדיוק גילינו והנקודה B שנתונה לנו.

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(1-4)^2}=5$$

לכן רדיוס המעגל הוא 5 יחידות .

עכשיו שמצאנו את מרכז המעגל והרדיוס נציב כדי לקבל את משוואת המעגל.

$$(x-7)^2+(y-1)^2=25$$

ג. כדי למצוא את שטח OBC נצטרך אורך צלע וגובה. אנחנו יודעים שOB וBM מאונכים אחד לשני, לכן המשך הקטע של BM גם יהיה מאונך לOB. כלומר BC מאונך לBM ככה שהצלעות שאנחנו מחפשים למציאת השטח הן OB וBC.

ניתן שBC היא המשך BM ככה שC נמצאת על המעגל וכיוון שBM הוא רדיוס אז BC הוא קוטר. ככה שאורך 10=2r=BC.

את אורך OB נמצא בעזרת נוסחת מרחק עם O וB.

$$d=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5$$

לכן $S_{\triangle OBC}=\frac{10\cdot 5}{2}=25$ יח"ר.

ד. כיוון שOM הוא הקוטר מרכז המעגל החדש יהיה באמצע OM. נוכל למצוא אותו בעזרת נוסחת אמצע קטע.

$$x=\frac{x_O+x_M}{2}=\frac{7}{2}=3.5$$
$$y=\frac{y_O+y_M}{2}=\frac{1}{2}=0.5$$
$$(3.5,0.5)$$

עכשיו שיש לנו את מרכז המעגל נוכל למצוא האם הוא בתוך המעגל המקורי בעזרת המרחק ממרכז המעגל החדש לנקודה M .

נזכור שאם המרחק קטן מהרדיוס המעגל המקורי מרכז המעגל החדש נמצא בתוך המקורי.

אם המרחק שווה, מרכז המעגל החדש על המעגל המקורי.

ואם המרחק גדול , המרכז מחוץ למעגל המקורי.

$$d=\sqrt{(3.5-7)^2+(0.5-1)^2}=3.535$$
$$3.535<r(=5)$$

מרכז המעגל החדש נמצא בתוך המעגל המקורי.

(3

ל- 8% בדיוק מחברי מועדון ג'ודו ארצי יש חגורה שחורה.

א. בוחרים באקראי 6 מן החברים במועדון.

(1) מהי ההסתברות שבדיוק ל- 2 מהם יש חגורה שחורה?

(2) מהי ההסתברות שאין חגורה שחורה לאף לא אחד מן ה- 6 שנבחרו?

$\frac{1}{5}$ מן החברים במועדון הם מדריכים, והשאר חניכים.

75% מחברי המועדון שיש להם חגורה שחורה הם מדריכים.

ב. בחרו באקראי חבר מועדון.

מהי ההסתברות שהחבר שנבחר הוא חניך שיש לו חגורה שחורה?

ג. בחרו באקראי חניך חבר במועדון.

מהי ההסתברות שיש לו חגורה שחורה?

פתרון:

א. ההסתברות שלחבר במועדון יש חגורה שחורה היא 0.08 . לכן ההסתברות שלחבר במועדון אין חגורה שחורה היא 0.92

(1) נשתמש בנוסחת ברנולי כדי למצוא את ההסתברות **שבדיוק** ל2 מתוך 6 החברים במועדון שנבחרו יש חגורה שחורה. $0.0688=\binom{6}{2}\cdot 0.08^2\cdot 0.92^4$

(2) נשתמש שוב בברנולי כדי למצוא את ההסתברות **שמתוך** 6 חברי המועדון שנבחרו לאף אחד אין חגורה שחורה. $0.6064=\binom{6}{0}\cdot 0.08^0\cdot 0.92^6$

ב. ניתן לנו ש $\frac{1}{5}$ מחברי המועדון הם מדריכים, כלומר ההסתברות שחבר מועדון הוא מדריך היא

0.2 ולכן ההסתברות שהוא חניך היא 0.8. בנוסף ניתן לנו שההסתברות שחבר מועדון שיש לו

חגורה שחורה הוא מדריך היא75% = $\frac{75}{100}$ =0.75, וזוהי הסתברות מותנית.

נשתמש בנתונים אלו והנתונים מהשאלה הקודמת כדי להרכיב טבלת הסתברויות.

	מדריך	לא מדריך-חניך	סה״כ
חגורה שחורה			0.08
אין חגורה שחורה			0.92
סה״כ	0.2	0.8	1

נוכל למצוא את ההסתברות , שחבר במועדון הוא מדריך **וגם** בעל חגורה שחורה, בעזרת

ההסתברות המותנית שניתנה לנו , הנוסחה של הסתברות מותנית ונתון מהסעיף הקודם.

P(יש לו חגורה שחורה והוא מדריך/ יש לו חגורה שחורה)= $\frac{\text{מדריך וגם בעל חגורה שחורה}}{0.08} = 0.75$

מדריך **וגם** בעל חגורה שחורה =0.06

עכשיו נוכל להשלים את שאר הטבלה

	מדריך	חניך	סה״כ
חגורה שחורה	0.06	0.02	0.08
אין חגורה שחורה	0.14	0.78	0.92
סה״כ	0.2	0.8	1

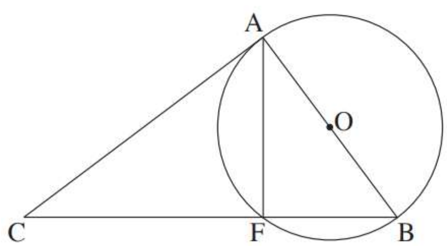
לכן ההסתברות שחבר המועדון הוא חניך **וגם** יש לו חגורה שחורה היא, 0.02.

ג. אנחנו רוצים למצוא את ההסתברות **מתוך** חניך במועדון מהי ההסתברות שיש לו חגורה שחורה.

זוהי הסתברות מותנית.

P(חניך במועדון עם חגורה שחורה/חניך במועדון)= $\frac{0.02}{0.8} = 0.025$

4)



נתון מעגל שמרכזו O.

C היא נקודה מחוץ למעגל, כך שהישר CA משיק למעגל בנקודה A.

מן הנקודה C העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות F ו־ B, כמתואר בציור, כך ש־ AB הוא קוטר במעגל.

א. הוכח: $\triangle AFB \sim \triangle CAB$.

נתון: $FB = 9$, $FC = 16$.

ב. חשב את קוטר המעגל, AB.

ג. חשב את שטח המשולש CFA.

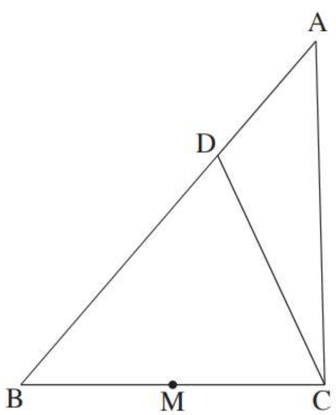
ד. האם $\triangle CFA \sim \triangle CAB$? הוכח את תשובתך.

פתרון:

	טענה	**נימוק**
1	CA משיק בנקודה A	נתון
2	AB קוטר במעגל	נתון
3	$\angle BAC = 90^\circ$	בנקודת ההשקה המשיק לנקודה והרדיוס לנקודה מאונכים אחד לשני ושורה 1
4	$\angle AFB = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על הקוטר שווה 90 מעלות ושורה 2
5	$\angle BAC = \angle AFB$	כלל מעבר
6	$\angle ABC = \angle ABF$	זווית משותפת
7	$\triangle AFB \sim \triangle CAB$ **מש"ל א'**	משפט דימיון ז.ז ושורות 5,6

8	16=FC ,9=FB	נתון
9	FB+CF=CB	חיבור הקטעים
10	25=16+9=CB	הצבה עם חישוב
11	$\frac{FB}{AB}=\frac{AB}{CB}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים ושורה 7
12	$\frac{9}{AB}=\frac{AB}{25}$ **מש"ל ב'** $AB^2=225$ $AB=15$	הצבה, חישוב ושורות 8,10
13	$\triangle AFB$ ישר זווית	שורה 4
14	$AB^2=AF^2+FB^2$	פיתגורס
15	$15^2=AF^2+9^2$ $144=AF^2$ $12=AF$	הצבה,חישוב שורות 8,12
16	$\angle AFC=180°-\angle AFB$	זוויות צמודות משלימות ל180 מעלות
17	$\angle AFC=180°-90°=90°$	הצבה,חישוב ושורה 4
18	$\triangle AFC$ משולש ישר זווית	שורה 17
19	$S_{\triangle AFC}=\frac{AF\cdot FC}{2}$	נוסחת שטח משולש ישר זווית
20	**מש"ל ג'** $S_{\triangle AFC}=\frac{12\cdot 16}{2}=96$	הצבה,חישוב ושורות 8, 17
21	$\angle AFC=\angle CAB$	כלל מעבר ושורות 4, 17
22	$\angle ACF=\angle BCA$	זווית משותפת
23	**מש"ל ד'** $\triangle CFA\sim\triangle CAB$	משפט דימיון ז.ז

5)



נתון משולש ABC.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB כך ש- $BD = 2DA$ (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle DCB = 65^o$, $DC = 10$, $BC = 12$.

א. חשב את אורך הקטע BD.

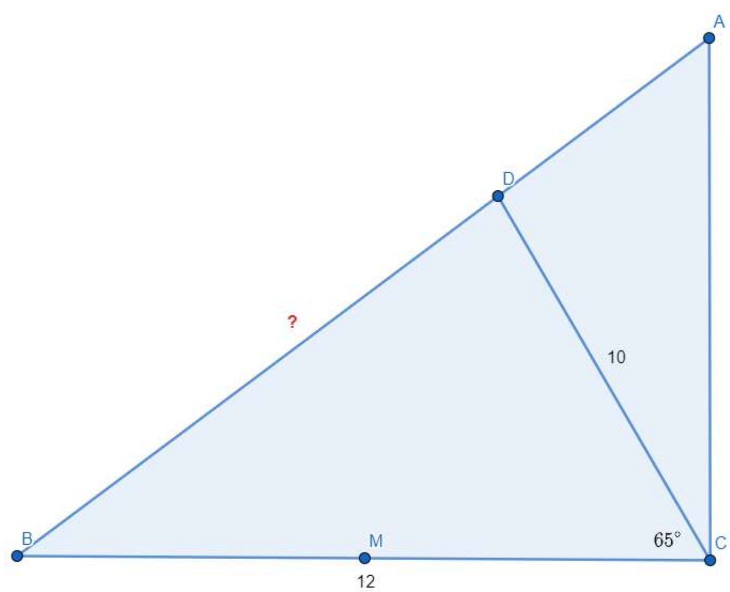
ב. חשב את שטח המשולש ADC.

הנקודה M היא אמצע הקטע BC.

ג. האם הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC? נמק.

פתרון:

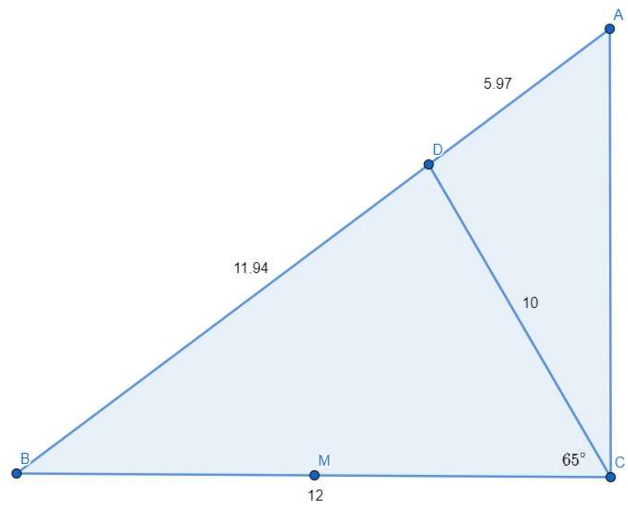
א. נסתכל על משולש BDC.



נשתמש במשפט הקוסינוס כדי למצוא את אורך BD

$$BD^2 = 10^2 + 12^2 - 2\cdot 10\cdot 12\cdot \cos 65^\circ$$
$$BD^2 = 142.572$$
$$BD = 11.94$$

ב. נסתכל על משולש BDC.

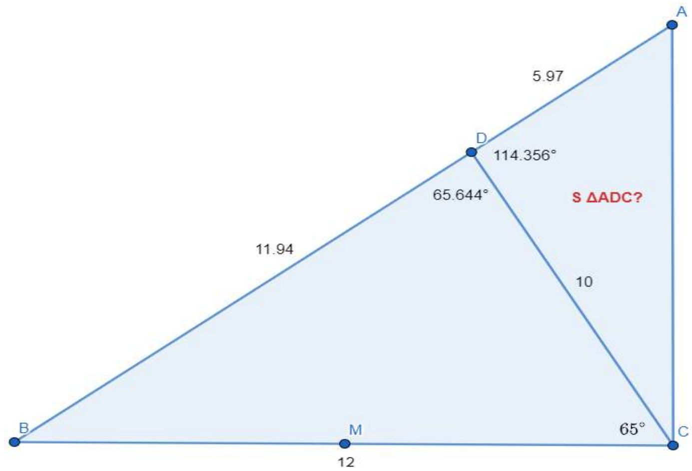


נשתמש במשפט הסינוס כדי למצוא את זווית BDC כדי שיהיה לנו את זווית ADC .

$$\frac{11.94}{\sin 65^\circ} = \frac{12}{\sin\angle BDC}$$
$$\sin\angle BDC = \frac{12\cdot \sin 65^\circ}{11.94}$$
$$\sin\angle BDC = 0.911$$
$$\angle BDC = 65.644^\circ$$
$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = 180^\circ - 65.644^\circ = 114.356^\circ$$

מצאנו בסעיף הקודם את BDוביחד עם הנתון 0.5BD=DA, $DA = 0.5\cdot 11.94 = 5.97$

עכשיו שיש לנו גם את זווית ADC ואורך DA נוכל להציב ולמצוא בעזרת הנוסחה את שטח המשולש ADC.



$$S_{\triangle ADC}=\frac{5.97\cdot 10\cdot \sin 114.356°}{2}=27.193$$

ג. נניח לשלילה שM היא מרכז המעגל ואנחנו יודעים שM היא אמצע הקטע BC כך ש BC הוא קוטר. בנוסף במעגל הזווית ההיקפית הנשענת על הקוטר שווה 90 מעלות. זה נגד מה שמצאנו בסעיף הקודם שזווית BDC =65.644 מעלות.

לכן הנקודה M אינה מרכז המעגל החוסם את BDC.

6)

נתונה הפונקציה $f(x)=-2+\sqrt{-x^2+5x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x ?

ג. מצא את השיעורים של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$, שתחום הגדרתה הוא תחום ההגדרה של $f(x)$. c הוא פרמטר.

ו. מה הם כל ערכי c שבעבורם הפונקציה $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה?

פתרון:

א. תחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים כאשר הביטוי תחת השורש הוא לא שלילי.

כלומר נבדוק עבור אילו ערכי x הביטוי שווה או גדול מאפס.

$$-x^2+5x\ge 0$$
$$x(5-x)\ge 0$$

$$x\ge 0$$
$$5-x\ge 0$$
$$x\le 5$$

$$0\le x\le 5$$

ב. שיעור ה y של נקודות החיתוך עם ציר ה x שווה לאפס.נציב f(x)=0.

$$0=-2+\sqrt{-x^2+5x}$$
$$2=\sqrt{-x^2+5x}$$
$$4=-x^2+5x$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 4}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=1,4$$

נקודות החיתוך הן (4,0), (1,0).

ג. כדי למצוא את נקודות הקיצון נגזור את הפונקציה ואז נשווה את הנגזרת לאפס.

$$f'(x)=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}$$
$$0=-2x+5$$
$$2x=5$$
$$x=2.5$$

נמצא את שיעור ה y של הנקודות -נקודות הקצה והקיצון.

$$f(2.5)=-2+\sqrt{-(2.5)^2+5\cdot(2.5)}=0.5\Rightarrow(2.5,0.5)$$
$$f(0)=-2+\sqrt{-(0)^2+5\cdot(0)}\Rightarrow(0,-2)$$
$$f(5)=-2+\sqrt{-5^2+5\cdot 5}\Rightarrow(5,-2)$$

נשתמש בטבלה כדי למצוא את סוג הקיצון.

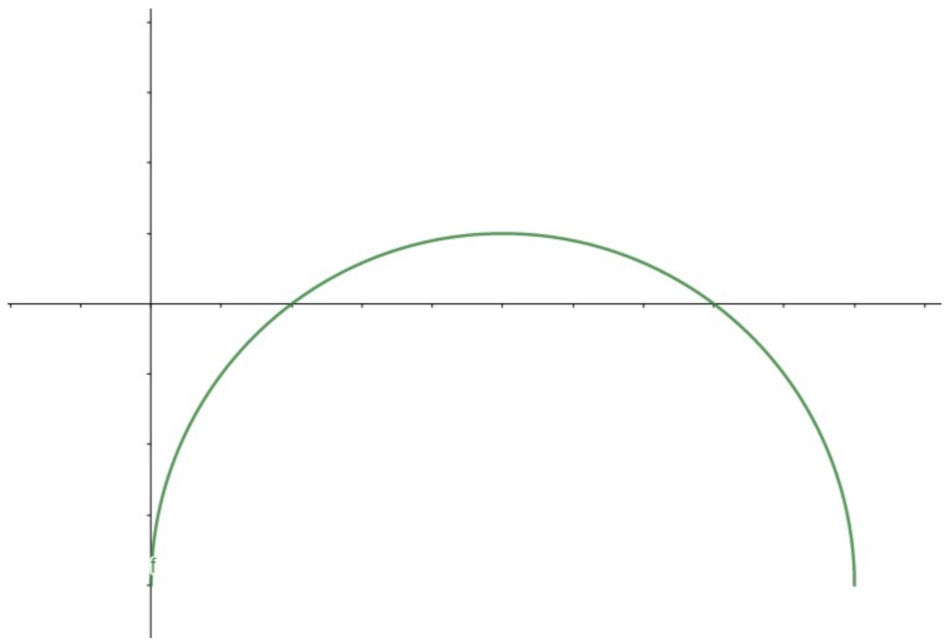
x	**0**	(1)	**2.5**	(4)	**5**
f'(x)		+		-	
f(x)	-2	↗	0.5	↘	-2

לכן נקודת הקיצון היא (2.5,0.5) מקסימום. בנוסף יש שתי נקודות קצה (0,-2) מינימום קצה,

(5,-2) מינימום קצה.

ד. לפי הטבלה אנחנו רואים שתחום העלייה הוא: $0<x<2.5$, ותחום הירידה הוא: $2.5<x<5$.

ה. נשרטט:



ו. הפונקציה $g(x)$ היא הזזה למעלה או למטה בC יחידות את הפונקציה $f(x)$. כדי שהיא תהיה חיובית בכל תחום הגדרתה נצטרך לדאוג ששיעור הy של נקודות המינימום קצה יהיו חיוביות. -2 הוא שיעור הy של שתי נקודות הקצה בפונקציה $f(x)$ אם נזיז ביותר משתי יחידות את $f(x)$ למעלה נקבל שיעורי y חיוביים וכך תחום הגדרת הפונקציה כולה תהיה חיובית.

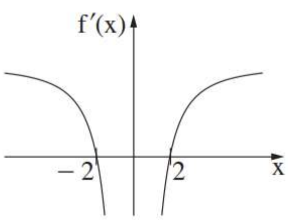
לכן עבור $C>2$, $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה.

(7

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

בציור שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת גם היא לכל $x \neq 0$,

וחותכת את ציר ה־ x בנקודות $(2, 0)$, $(-2, 0)$.



א. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגן על פי הגרף.

נתון: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a$ לכל $x \neq 0$. $a > 0$ הוא פרמטר.

ב. מצא את a .

ענה על סעיף ג בעבור $x > 0$.

שיעור ה־ y של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 10 .

ג. **(1)** כתוב ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $x > 0$.

פתרון:

א. אנחנו יודעים שעל פי הנגזרת נקודות החיתוך עם ציר הx הן נקודות הקיצון של הפונקציה. בנוסף

אנחנו יודעים שכשהנגזרת חיובית הפונקציה עולה. וכשהנגזרת שלילית אז הפונקציה יורדת.

לכן הפונקציה עולה ב $x>2$ ו$x<-2$ והפונקציה יורדת עבור $-2<x<0$ ו$0<x<2$.

כך שב $x=-2$ יש לנו נקודת מקסימום וב$x=2$ יש נקודת מינימום בפונקציה.

ב. אם ניקח את אחת מהנקודות קיצון שקיבלנו ונציב בפונקציה ואז נשווה לאפס נוכל למצוא את a.

$$0 = -\frac{1}{2^2} + a$$

$$a = \frac{1}{4}$$

ג. (1) כדי למצוא את המשוואה של f(x) נשתמש באינטגרל כדי להגיע לביטוי כללי של המשוואה .

לאחר מכן נציב את שיעורי נקודת המינימום לפי מה שמצאנו והנתון החדש שניתן לנו . זאת כדי

למצוא את C, ולהגיע למשוואה הסופית של f(x).

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4})dx = \int (-x^{-2} + \frac{1}{4})dx = \left[-\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}x + C\right] = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + C$$

שיעור הx של נקודת המינימום הוא 2 ושיעור הy לפי הנתון הוא 10. נציב זאת ונמצא את C.

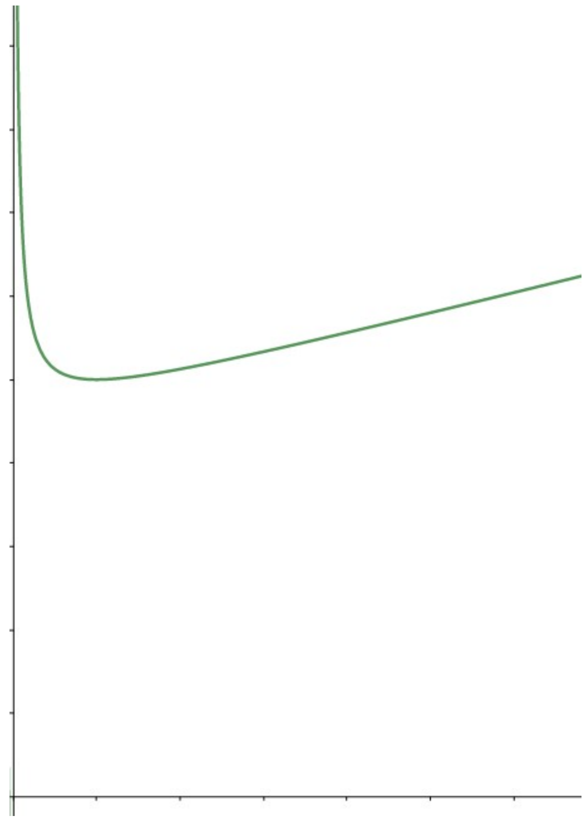
$$10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + C$$

$$C = 9$$

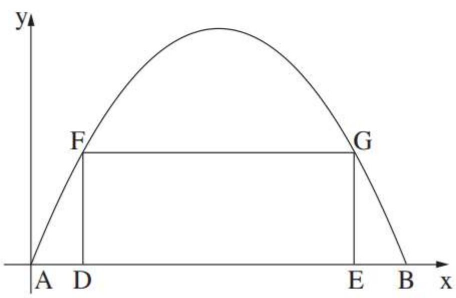
לכן $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + 9$

(2) אנחנו יודעים שיש לפונקציה מינימום ב(2,10) ושאנחנו משרטטים אותה עבור x>0 עכשיו נוכל

לשרטט:



8)



המלבן DFGE חסום בין גרף הפרבולה $y = -x^2 + 6x$

ובין ציר ה־ x , כמתואר בציור.

הנקודות A ו־ B הן נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה־ x ,

כמתואר בציור.

k הוא פרמטר. נתון: $0 < k < 3$.

נתון: $AD = EB = k$.

א. הבע באמצעות k את אורכי הצלעות של המלבן DFGE .

ב. מצא את k שבעבורו שטח המלבן DFGE הוא מקסימלי.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

פתרון:

א. נתחיל בלמצוא את DE. אנחנו יודעים שAB-2K=AB-AD-BE=DE . אם נמצא מה אורך AB

נוכל למצוא כמה DE שווה באמצעות K.

אנחנו רואים על פי השרטוט שA וB הן נקודות חיתוך עם ציר הx לכן כדי למצוא את אורך AB

כל מה שנצטרך לעשות זה למצוא את שיעורי הx שלהן , נציב y=0 ונמצא את A וB.

$$0 = -x^2 + 6x$$
$$0 = -x(x+6)$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow A(0,0)$$
$$x_2 - 6 = 0$$
$$x_2 = 6 \Rightarrow B(6,0)$$

לכן AB=6. כך ש 62-K=DE

כדי למצוא את DF נראה שמדובר על ישר שמאונך לציר הx לכן אורך DF שווה לשיעור ה y של F

פחות שיעור הy של D ושיעור הx שלהם זהה. שיעור x של D וF הוא K כיוון שמצאנו ששיעור

הנקודה A היא (0,0) ואנחנו יודעים שאורך K=AD .

נציב x=K במשוואת הפרבולה כדי למצוא את שיעור הy של F.

$$y_F = -k^2 + 6k$$
$$DF = y_F - y_D = -k^2 + 6k - 0$$

לכן אורך DF= $-k^2+6k$

ב. כדי למצוא את K המקסימלי עבור שטח המלבן נבנה פונקציה שמייצגת את שטח המלבן. לאחר מכן נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס ונבדוק האם עבור הערך המתקבל הפונקציה (השטח) מקסימלי.

$$S=f(k)=DF\cdot DE$$
$$f(k)=(-k^2+6k)(6-2k)=-6k^2+2k^3+36k-12k^2=2k^3-18k^2+36k$$

עכשיו נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f'(k)=6k^2-36k+36$$
$$0=6k^2-36k+36$$
$$0=k^2-6k+6$$
$$\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 6}}{2}\Rightarrow k_{1,2}=3+\sqrt{3},3-\sqrt{3}$$

הפתרון הראשון נפסל כיוון שנתון לנו ש 0<K<3. עבור הפתרון השני נשתמש בטבלה על מנת לבדוק האם עבור פתרון זה השטח מקסימלי.

x	(1)	$3-\sqrt{3}$	(2)
f'(x)	+		-
f(x)	↗		↘

לכן עבור K= $3-\sqrt{3}$ שטח המלבן מקסימלי.