פתרון בגרות מועד קיץ 2018 שאלון 35481 (804)

1)

המרחק בין עיר א ובין עיר ב הוא 126 ק"מ.

בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר א לעיר ב.

בשעה 8:30 יצא רוכב אופניים מעיר ב לעיר א.

המכונית ורוכב האופניים נפגשו בשעה 9:30, והמשיכו בדרכם.

15 דקות לאחר הפגישה הגיעה המכונית לעיר ב.

המכונית ורוכב האופניים לא שינו את מהירויותיהם בזמן הנסיעה.

א. מצא את מהירות הנסיעה של המכונית ואת מהירות הנסיעה של רוכב האופניים.

יום לאחר מכן, יצאו המכונית ורוכב האופניים זה לקראת זה באותו הזמן.

המכונית יצאה מעיר ב לעיר א, ואילו רוכב האופניים יצא מעיר א לעיר ב.

המכונית נסעה במהירות קבועה הגדולה ב־ a קמ"ש מן המהירות שבה נסעה ביום שלפני כן,

ואילו רוכב האופניים נסע במהירות קבועה הקטנה ב־ a קמ"ש מן המהירות שבה נסע ביום שלפני כן.

המכונית ורוכב האופניים נפגשו לאחר t שעות.

ב. מצא את t.

<u>פתרון:</u>

על מנת לעבוד בצורה יעילה עם בעיות תנועה נכין לנו טבלה ונמלא לפי הנתונים הבאים, חלקם ניתנו לנו בשאלה וחלקם אנחנו משלמים:

נסמן את מהירות המכונית- x ומהירות האופניים-y

נתון נוסף הוא זמן המפגש של המכונית והאופניים שזה 9:30 וגם נתון שהמכונית יצאה ב8:00 והאופניים ב08:30 אם כך הדבר הבא שאנחנו יודעים זה שעד המפגש האופניים נסעו שעה והמכונית שעה וחצי.

עכשיו שיש לנו את המהירות והזמן לפני הפגישה ניתן לכפול אותם ולקבל את הדרך שכל כלי עבר לפני הפגישה. הדרך שהאופנים עברו הם y , הדרך שהמכונית עברה היא x1.5.

לגבי אחרי המפגש אנחנו יודעים שהמכונית נסעה רבע שעה ואותה מהירות, כך שהדרך שהמכונית עברה עד להגעה לעיר ב' היא x0.25.

עכשיו ניתן להכין את הטבלה-

	זמן	מהירות	דרך
מכונית לפני המפגש	1.5	x	1.5x
אופניים	1	y	y
מכונית אחרי המפגש	0.25	x	0.25x

הטבלה עוזרת לנו להבין יותר טוב את הנתונים וככה לענות בקלות על השאלות.

א. נתון נוסף שלא הכנסנו לטבלה הוא שסה"כ המרחק בין עיר א' לעיר ב' זה 126 ק"מ עם נסתכל בטבלה ולפי הסיפור כל כלי יצא מעיר האחרת. כלומר עם ניקח את הדרך שהמכונית עברה עד הפגישה והדרך שהאופניים עברו עד הפגישה ונחבר יחד זה שווה ל126 ק"מ.

נכתוב את זה כמשוואה הראשונה שלנו.

$$1\frac{1}{2}x + y = 126$$

המשוואה השניה שלנו זה מה קרה אחרי המפגש. המכונית השלימה את כל המסע לעיר השנייה כלומר נשאר לה להשלים את הדרך שהאופניים ביצעו עד המפגש. ולכן המשוואה השניה שלנו היא

$$\frac{1}{4} \cdot x = y$$

עכשיו נפתור ונמצא את שתי המהירויות בעזרת מערכת משוואות עם שני נעלמים.

$$1\frac{1}{2} \cdot x + y = 126$$
$$\frac{1}{4} \cdot x = y$$

$$1\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot x = 126$$
$$1\frac{3}{4} \cdot x = 126$$
$$x = 72$$
$$y = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$$

מהירות המכונית 72 קמ״ש ואופניים 18 קמ״ש

ב. קיבלנו נתונים חדשים על מה קרה עם התנועה יום לאחר מכן, נכניס לטבלה את הדברים

הבאים:

מהסעיף הקודם אנחנו יודעים שמהירות המכונית הייתה 72 קמ"ש ומהנתון בסעיף זה

מהירותה יום אחרי היא a+72

בנוסף אנחנו יודעים שמהירות האופנים הייתה 18 קמ"ש ויום אחרי גם לה נוסף a לכן

מהירות האופנים היא 18+a

הנתון הבא שקיבלנו זה שזמן הנסיעה הפעם זהה בין המכונית לאופנים.

עכשיו כמו שאנחנו יודעים דרך=מהירות x זמן , אז הדרך שעברה המכונית עד הפגישה היא

t(72+a) והאופניים t(18-a) . נזכור שסה"כ המרחק בין עיר א' לב' הוא 126 ק"מ

נמלא את הטבלה:

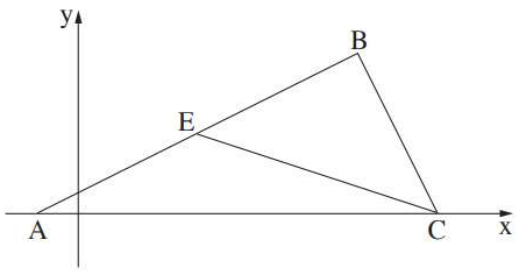
	זמן	מהירות	דרך
מכונית	t	72+a	t(72+a)
אופניים	t	18-a	t(18-a)

עכשיו אפשר לחשב את חיבור המרחקים שלהם ולהשוות ל126, ונקבל את t.

$$\begin{aligned} &t(72+a)+t(18-a)=126 \\ &72t+at+18t-at=126 \\ &90t=126 \\ &t=1.4 \end{aligned}$$

זמן הנסיעה הוא 1.4 שעות.

2)



CE הוא תיכון במשולש ABC .

נתון: $A(-1,0)$, $B(7,4)$,

הקודקוד C נמצא על ציר ה־ x (ראה ציור).

א. מצא את שיעורי הנקודה E .

נתון: $EB = BC$,

שיעור ה־ x של הקודקוד C גדול משיעור ה־ x של הקודקוד B .

ב. מצא את שיעורי הקודקוד C .

מן הנקודה B הורידו אנך לציר ה־ x .

האנך שהורידו חותך את הקטע CE בנקודה K ואת ציר ה־ x בנקודה F .

ג. **(1)** מצא את שיעורי הנקודה K ואת אורך הקטע KF .

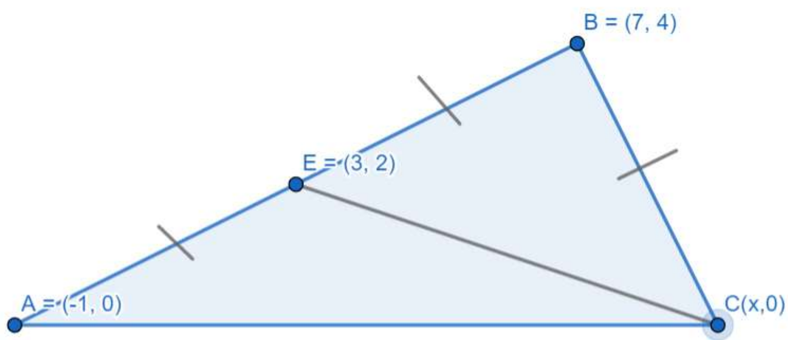
(2) חשב את שטח המשולש EKF .

פתרון:

א. אחד מהנתונים שלנו זה ש CE הוא התיכון של AB. נשתמש בנוסחא לאמצע קטע כדי למצוא את E.

$$x_E = \frac{7-1}{2} = 3$$
$$y_E = \frac{4}{2} = 2$$
$$E(3,2)$$

ב. נשרטט שוב עם הנתונים שהוסיפו לנו והתשובה מסעיף א'



כדי למצוא את C אפשר להשוות בין שני המרחקים שעכשיו ידוע לנו שהם שווים EB ו BC. את EB נמצא בהמצאות נוסחת המרחק. ידוע לנו כמה זה E אז נחשב את BC בעזרת נוסחת המרחק. רק שבמקרה של C חסר לנו שיעור הx שלו (הנקודה C על ציר ה x ככה ששיעור הy שלה הוא 0), נסמן את שיעור הx שאנחנו מחפשים פשוט בx.

$$d_{EB} = \sqrt{(3-7)^2+(2-4)^2} = 2\sqrt{5}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(x-7)^2+(-4)^2} = \sqrt{x^2-14x+49+16} = \sqrt{x^2-14x+65}$$

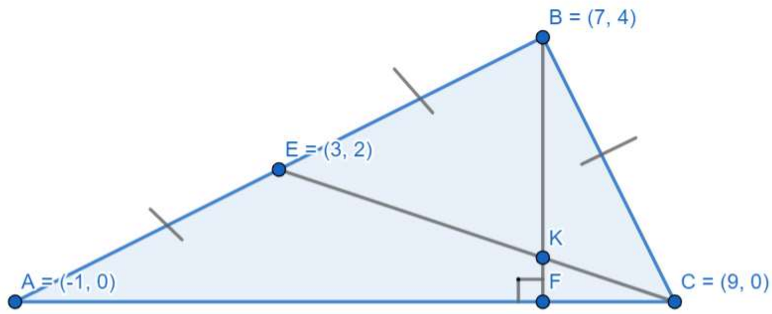
עכשיו נשווה בין שני המרחקים שמצאנו ונגלה ש

$$\sqrt{x^2-14x+65} = 2\sqrt{5}$$
$$x^2-14x+65 = 20$$
$$x^2-14x+45 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot1\cdot45}}{2\cdot1} \Rightarrow$$
$$x_1 = 9, x_2 = 5$$

קיבלנו שני ערכי x אבל לפי הנתון כתוב שהערך של C גדול משל B ולכן התשובה היא

.C(9,0)

ג. נוסיף לשרטוט שלנו עכשיו גם את הנקודה C, והנתונים שהוסיפו לנו.



(1) בגלל שהנקודות האלו נמצאות על ישר שהוא מאונך לציר ה x וB גם נמצא בישר זה

שיעור הx של שניהם הוא 7. הנקודה F גם חותכת את ציר ה x לכן היא F(7,0).

לגבי הנקודה K היא נמצאת על CE ויש לנו את שיעור ה x שלה , אם נמצא את

משוואת CE נוכל פשוט להציב את שיעור הx שלה ולמצוא את הy.

בשביל למצוא את המשוואה נצטרך למצוא שיפוע ונקודה. נמצא את השיפוע בעזרת

הנוסחה עם E וC

$$M_{EC} = \frac{2}{3-9} = -\frac{1}{3}$$

עכשיו נציב את השיפוע והנקודה Cבנוסחא למשוואת הישר.

$$y=-\frac{1}{3}(x-9)$$
$$y=-\frac{1}{3}x+3$$

נציב את שיעור הx של K במשוואה לקבלת שיעור הy ונקבל את K.

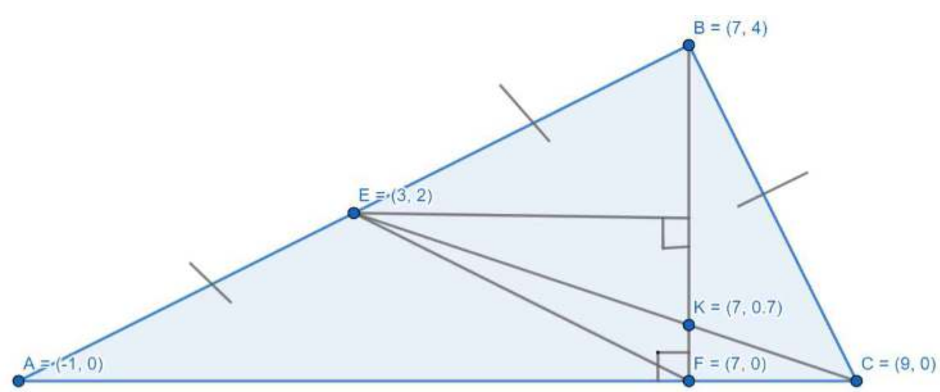
$$y=-\frac{1}{3}\cdot 7+3$$
$$y=\frac{2}{3}$$
$$K(7,\frac{2}{3})$$

עכשיו שיש לנו את K וF בגלל שהן בישר המאונך האורך של KF זה ההפרש בין

שיעורי ה x של הנקודות כך ש

$$KF=x_k-x_F=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

(2) נחדש את השרטוט שלנו עם הנתונים החדשים והתשובה מהסעיף הקודם.



בגלל שKF מאונך לציר הx אנחנו יודעים שאפשר להוריד גובה למשולש EKF מE. ובגלל שהורדנו גובה הוא מאונך לכל הקטע KF והמשכו ככה שלמעשה הוא מאונך לציר הy. אז אפשר לחשב את האורך שלו אם נחסר את שיעור הx של כל נקודה בBF מהנקודה E, כך ש גובה=7-3=4.

עכשיו נחשב את השטח עם הקטע KF והגובה שמצאנו.

$$S_{\Delta EKF}=\frac{4\cdot\frac{2}{3}}{2}=\frac{4}{3}$$

3)

בסל יש 2 תפוחים ומספר מסוים של אפרסקים.

טל הוציאה באקראי מן הסל שני פירות זה אחר זה ללא החזרה.

ההסתברות שהיא הוציאה שני תפוחים היא $\frac{1}{36}$.

א. מצא כמה אפרסקים היו בסל לפני שטל הוציאה ממנו פירות.

ב. מהי ההסתברות שהפרי השני שהוציאה טל היה תפוח?

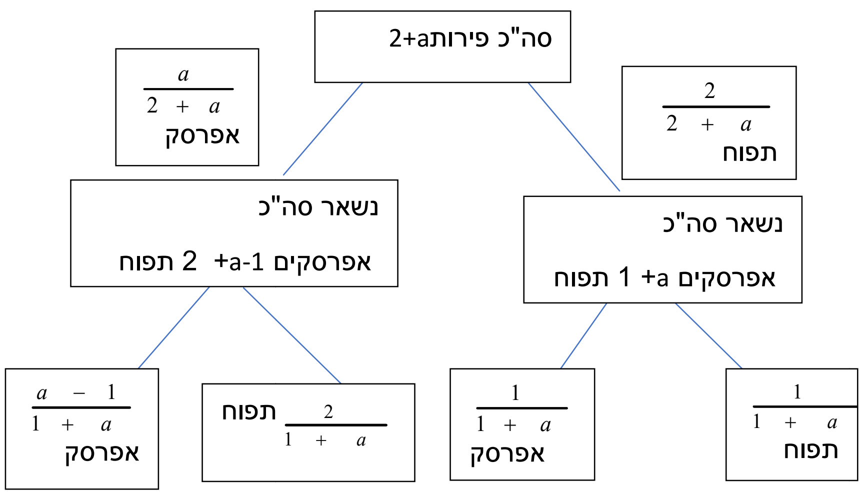
ג. **(1)** חשב את ההסתברות שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו הסוג.

(2) ידוע שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני אפרסקים?

פתרון:

נשתמש בדיאגרמת עץ כדי לפרוש את הנתונים ככה שיהיה לנו קל יותר להבין. כמות האפרסקים-a אז

הכמות הכוללת בסל היא a+2.



א. נתון נוסף שיש לנו היא ההסתברות להוציא שני תפוחים נשתמש בזה כדי למצוא את a.

ההסתברות להוציא שני תפוחים באמצעותa

$$P=\frac{2}{2+a}\cdot\frac{1}{1+a}=\frac{2}{(2+a)(1+a)}$$

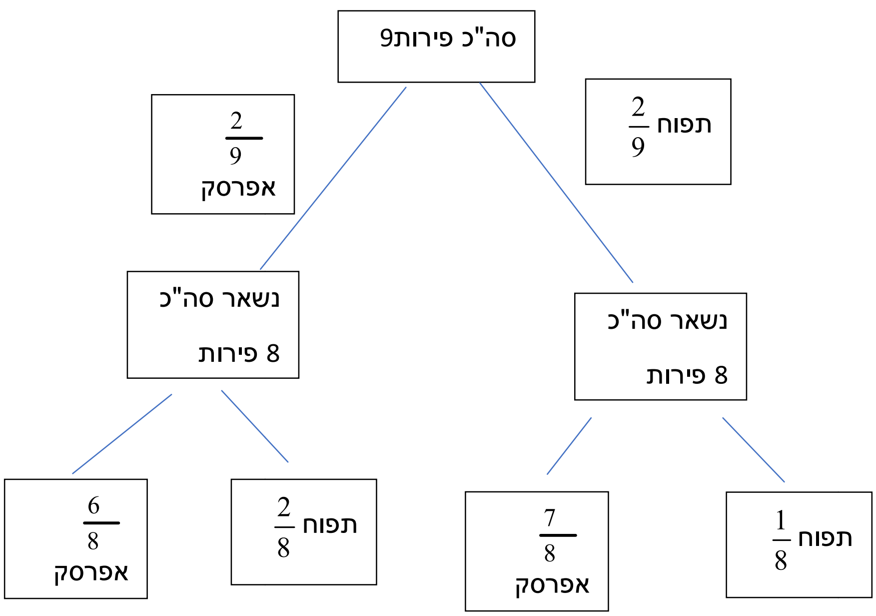
נשווה לנתון שיש לנו

$$\frac{2}{(2+a)(1+a)}=\frac{1}{36}$$
$$72=(2+a)(1+a)$$
$$72=2+2a+a+a^2$$
$$a^2+3a-70=0$$
$$\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-70)}}{2\cdot1}\Rightarrow$$
$$x_1=-10, x_2=7$$

מספר אפרסקים יכול להיות רק חיובי או 0 לא משהו שלילי לכן התשובה היא שכמות האפרסקים בסל

לפני שהוציאה פירות היא 7.

ב. נשרטט שוב את הדיאגרמה שלנו עם התשובה שקיבלנו.



נחשב את ההסתברות שהפרי השני הוא תפוח

$$P_1=P\left(\begin{matrix}\text{ת}\\\text{ת}\end{matrix}\right)+P\left(\begin{matrix}\text{א}\\\text{ת}\end{matrix}\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$$

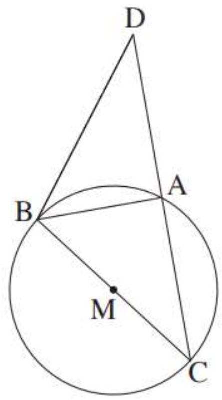
ג. (1) נחשב את ההסתברות שהיא הוציאה שני פירות מאותו סוג

$$P_2 = P\left(\substack{\text{ת}\\ \text{ת}}\right) + P\left(\substack{\text{א}\\ \text{א}}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} = \frac{11}{18}$$

(2) ונחשב הסתברות שהיא הוציאה שני אפרסקים כשהיא הוציאה בטוח שני פירות מאותו הסוג.

$$\frac{P\left(\substack{\text{א}\\ \text{א}},\right)}{P_2} = \frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{11}{18}} = \frac{21}{22}$$

4)



בציור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M ורדיוסו R.

BC הוא קוטר במעגל. הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל.

הקטע DC חותך את המעגל בנקודה A.

נתון: $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$.

א. הוכח ש־ BA הוא חוצה זווית במשולש DBC.

ב. הוכח: $\Delta CBD \sim \Delta CMA$.

ג. הוכח כי MA הוא קטע אמצעים במשולש DBC.

ד. נתון: המשולש ABM הוא משולש שווה צלעות.

הבע את שטח המשולש CBD באמצעות רדיוס המעגל.

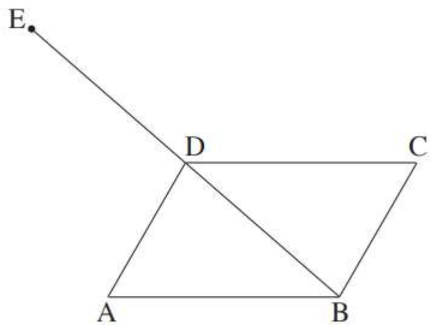
<u>פתרון:</u>

	טענה	נימוק
1	יצירת קן בין M לA	בניית עזר
2	R=MC=MA=MB	נתון וגם רדיוסים במעגל שווים אחד לשני
3	BC קוטר מעגל	נתון
4	$\sphericalangle BAC = 90°$	זווית היקפית במעגל שנשענת על הקוטר שווה 90 מעלות
5	AMC$\sphericalangle ABD = 0.5\sphericalangle AMC$	נתון
6	$\sphericalangle ABD = \alpha$	סימון
7	$\sphericalangle AMC = 2\alpha$	הצבה מ5 ו6

8	$\angle ABC = \alpha$	זווית היקפית במעגל שווה חצי מהזווית מרכזית על אותה קשת ו7
9	$\angle ABC = \angle ABD$	כלל המעבר 6 ו8
10	BA חוצה זווית DBC**מש"ל של סעיף א'**	חוצה זווית מחלק זווית לשני חצאים
11	$\angle DBC = \angle CBA + \angle DBA$	חיבור הזוויות
12	$\angle DBC = 2\alpha$	הצבה עם 6 ו8 וחישוב
13	$\angle AMC = \angle DBC$	כלל המעבר ו7 ו12
14	$\angle AMC = \angle BCD$	זווית משותפת לAMC וCBD
15	$\Delta CBD \sim \Delta CMA$ **מש"ל של סעיף ב'**	משפט הדימיון ז.ז ושורות 13 ו14
16	BA הוא גובה לDC	מ4
17	משולש DBC שווה שוקיים	משולש שהגובה,תיכון וחוצה הזווית הם אותו הדבר הוא שווה שוקיים
18	BA תיכון לDC	17
19	CA=DA	התיכון מחלק צלע לשני חלקים שווים
20	MA קטע אמצעים **מש"ל של סעיף ג'**	קטע במשולש מאמצע צלע לאמצע צלע אחרת הוא קטע

		אמצעים 21 ו19
21	ABM משולש שווה צלעות	נתון
22	R=BM=AB=AM	כל הצלעות שוות במשולש שווה צלעות ו21
23	2R=BC	קוטר מעגל שווה לפעמיים הרדיוס
24	$AB^2 + AC^2 = BC^2$	משפט פיתגורס על משולש ABC
25	$R^2 + AC^2 = (2R)^2$ $R^2 + AC^2 = 4R^2$ $AC^2 = 3R^2$ $AC = \sqrt{3}R$	הצבה 22 ו23+חישוב
26	$DA = \sqrt{3}R$	כלל המעבר ו20 ו25
27	DA+CA=CD	חיבור הצלעות
28	$CD = \sqrt{3}R + \sqrt{3}R = 2\sqrt{3}R$	הצבה עם חישוב 25 ו26
29	שטח CBD= $\frac{BA \cdot DC}{2} = \frac{R \cdot 2\sqrt{3}R}{2} = \sqrt{3}R^2$ **מש"ל של סעיף ד'**	חישוב שטח משולש+הצבה ו22 ו28

5)



ABCD היא מקבילית.

נתון: $AB = 15$, $BC = 10$.

נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$ $(\alpha < 90^{o})$.

א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BAD .

נתון: שטח המקבילית הוא $75\sqrt{3}$.

ב. חשב את גודל הזווית α .

ג. חשב את אורך האלכסון BD .

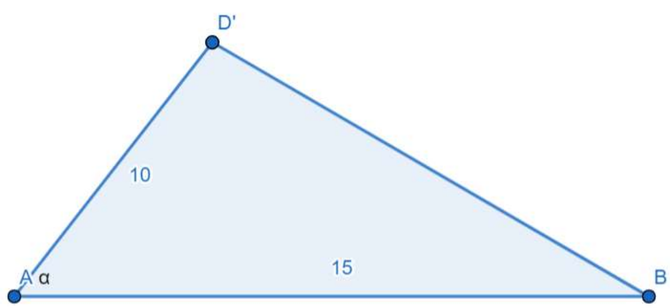
הנקודה E נמצאת על המשך האלכסון BD , כמתואר בציור, כך ש־ $ED = DB$.

ד. **(1)** מצא את גודל הזווית ABE .

(2) מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABE .

__פתרון:__

א. נתון שABCD היא מקבילית זה אומר שהצלעות הנגדיות שוות, 10=BC=DA.



ניתן לחשב את השטח בעזרת הנוסחא

$$\frac{\alpha \cdot x \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta BAD} = \frac{10 \cdot 15 \cdot \sin\alpha}{2} = 75\sin\alpha$$

כמו כן עכשיו אנחנו יודעים כמה זה DA וכמה זה BA

ב.כדי למצוא את α

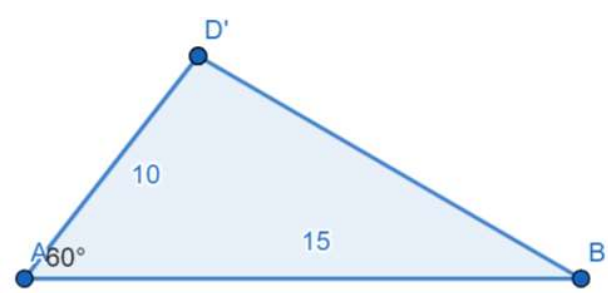
נעזר בכך שאנחנו יודעים שהשטח של המשולש פעמים זה השטח של המקבילית כך ש

$$S_{ABCD} = 2\cdot 75\sin\alpha = 150\sin\alpha$$

כמו כן אנחנו יודעים שהשטח של המקבילית שווה ל $75\sqrt{3}$

אז

$$150\sin\alpha = 75\sqrt{3} \ / \div 150$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 60^\circ$$



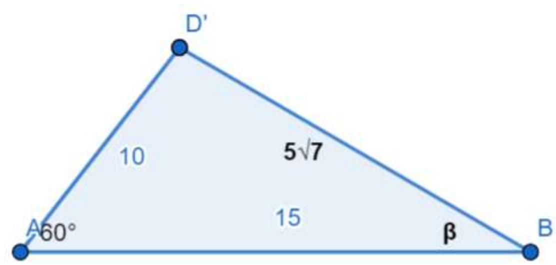
ג.נשתמש במשפט הקוסינוס עם הצלעות DA וBA שיש לנו והתשובה מהסעיף הקודם כדי למצוא את BD

$$BD^2 = 10^2 + 15^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\cos 60^\circ$$
$$BD^2 = 175$$
$$BD = 5\sqrt{7} = 13.228$$

ד.(1) **נחזור לאותו משולש שאיתו פעלנו עד עכשיו שיש לנו הרבה נתונים ונמצא את הזווית** ABE

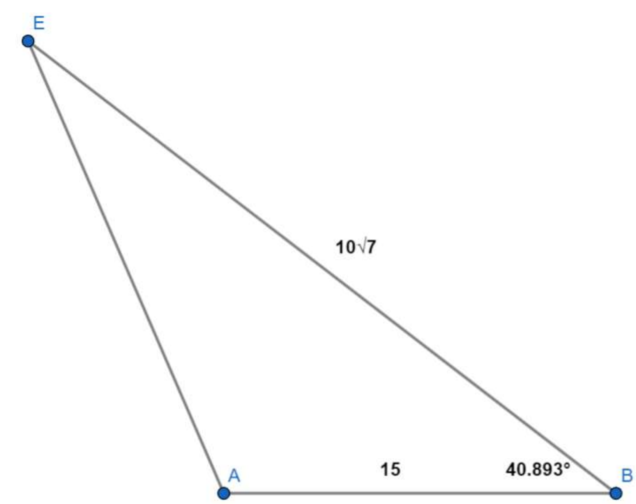
שהיא יכולה להיקרא גם זווית ABD במשולש ABD. נזכור שיש לנו את DA את BA הזווית DAB

וBD.



נשתמש עכשיו במשפט הסינוס כדי למצוא את הזווית

$$\frac{10}{\sin\beta}=\frac{5\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$$
$$\sin\beta=0.654$$
$$\beta=40.893^\circ=\angle ABD$$



(2)הוסיפו לנו נתון שDB=ED ואנחנו יודעים כבר כמה

זה DB אז EB= $10\sqrt{7}$

נסתכל על משולש AEB יש לנו עכשיו את EBAB

והזווית EBA . ניתן למצוא עכשיו את AE עם משפט

הקוסינוס.

$$AE^2 = 15^2 + (10\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10\sqrt{7} \cdot \cos(40.893)$$
$$AE^2 = 324.996$$
$$AE = 18.027$$

עכשיו שמצאנו את AE אפשר למצוא את הרדיוס של המעגל החוסם עם משפט הסינוס.

$$\frac{18.027}{\sin(40.893)} = 2R$$
$$R = 13.768$$

6)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=4$ ו־ $x=5$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-4$.

ג. מהו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=4$ ו־ $x=5$? נמק.

<u>פתרון:</u>

א.(1) תחום ההגדרה מוגדר על מתי x מתאפס

$$(x-3)^2=0$$
$$x-3=0$$
$$x=3$$

תחום ההגדרה הוא- $x\neq 3$

(2)אסימפטוטה מאונכת לציר הX היא תחום ההגדרה כלומר x=3

בשביל למצוא את האסימפטוטה שמאונכת לציר הy נשתמש בכלל של החזקה הגבוהה

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$$
$$\Rightarrow 0+4=4$$

אז האסימפטוטה היא y=4.

(3) כדי למצוא את תחומי העלייה והירידה אנחנו צריכים לגזור את הפונקציה ולהציב f'(x)=0.כדי לראות האם יש נק' קיצון. לאחר מכן נציב בטבלה וניקח שיעורי x לפני ואחרי תחום ההגדרה ובהתאם לנק' קיצון אם יש.

$$f'(x)=\frac{0-2(x-3)}{(x-3)^4} / \div(x-3)$$
$$f'(x)=\frac{-2}{(x-3)^3}$$
$$0=\frac{-2}{(x-3)^3}$$
$$0\neq -2$$

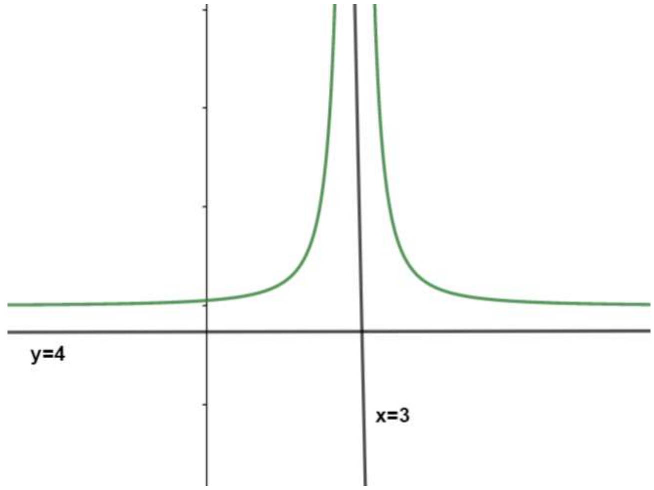
אין פתרון כלומר אין נק' קיצון

X	X=0	3	X=4
f'(x)	+		-
f(x)	↗		↘

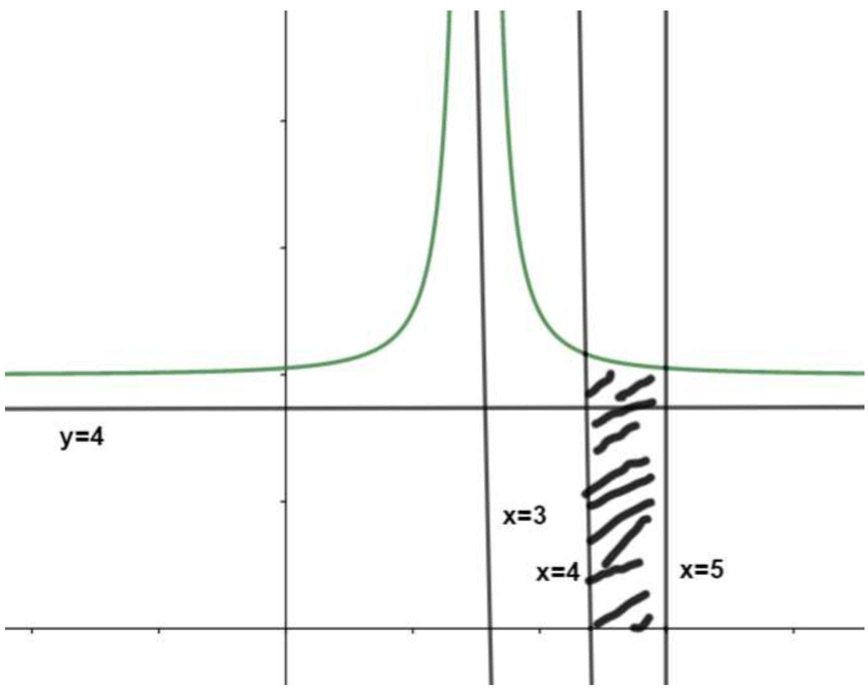
$$f'(0)=\frac{-2}{(-3)^3}>0$$
$$f'(4)=\frac{-2}{(1)^3}<0$$

עליה : x<3, ירידה : x>3

(4)



ב.כדי לחשב בצורה הנוחה ביותר את השטח ניקח את השרטוט שיש לנו ונוסיף את הישרים בהם השטח מוגבל.



עכשיו שיש לנו את השרטוט אפשר לראות שאפשר לחשב את השטח בעזרת אינטגרל.

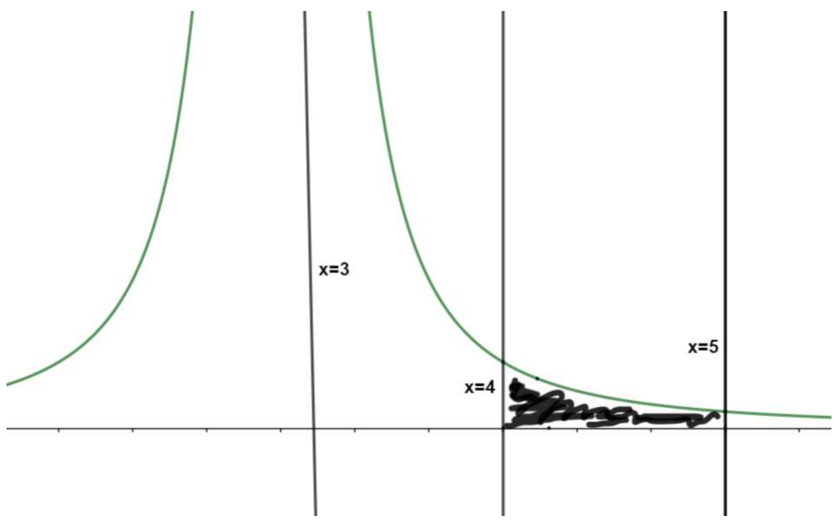
$$\int_4^5 \left[\frac{1}{(x-3)^2}+4\right]dx=\int_4^5\left[(x-3)^{-2}+4\right]dx=\left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+4x\right]$$

$$\left[\frac{-1}{x-3}+4x\right]\Rightarrow$$

$$\left[\frac{-1}{5-3}+4\cdot 5\right]-\left[\frac{-1}{4-3}+4\cdot 4\right]=S$$

$$S=4.5$$

ג.נתון ש g(x)=f(x)-4. כלומר הפונקציה הזאת היא f(x) שהורידו למטה 4 יחידות והמשוואה היא זאת אומרת שמבחינת האסימפטוטות זה יהיה y=0. ולגבי האסימפטוטה שמאונכת לציר הx נשאר ללא שינוי כי מה שזז 4 יחידות למטה זה ערכי הy.



נחשב את השטח באמצעות האינטגרל.

$$\int_4^5 \frac{1}{(x-3)^2}dx=\int_4^5 (x-3)^{-2}dx=\left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1}\right]=\left[\frac{-1}{x-3}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\frac{-1}{5-3}\right]-\left[\frac{-1}{4-3}\right]=S$$

$$S=\frac{1}{2}$$

7)

נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x+a}$. a הוא פרמטר.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

הנקודה $(2,24)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את a .

הצב $a=7$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$. c הוא פרמטר.

ד. מהו הערך של c שעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה־ x ? נמק.

פתרון:

א. מבחינת תחום הגדרה נשים לב שהפונקציה מורכבת ממכפלה עם ביטוי תחת שורש. לכן צריך

לבדוק עבור איזה ערכים הביטוי תחת השורש הוא לא שלילי.

$$x+a\geq 0$$
$$x\geq -a$$

ב.נציב את הנקודה שניתנת לנו בx וy ונמצא כמה a שווה.

$$24=2^3\sqrt{2+a}$$
$$24=8\sqrt{2+a}$$
$$3=\sqrt{2+a}$$
$$9=2+a$$
$$a=7$$

ג.נוסיף את הערך של a לפונקציה כך שהפונקציה היא $f(x)=x^3\sqrt{x+7}$

(1)בשביל חיתוך עם ציר הx נציב y=0 ובשביל חיתוך עם ציר הy נציב x=0.

$$f(0)=0^3\sqrt{0+7}=0$$
$$(0,0)$$

$$0=x^3\sqrt{x+7}$$
$$x_1=0$$
$$x_2\Rightarrow 0=\sqrt{x+7}=-7$$
$$(-7,0)$$

נקודות החיתוך הן : (0,0) (-7,0)

(2)כדי למצוא את נקודות הקיצון נשים לב שהפונקציה היא מכפלה וצריך לגזור אותה לפי נגזרת של מכפלת פונקציות. אחרי שנגזור נציב 0 ב-$f'(x)$.

X		-7	X=-6.5	-6	X=-1	0	X=1

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+\frac{x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2\sqrt{x+7}\cdot 2\sqrt{x+7}+x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2(x+7)+x^2}{2\sqrt{x+7}}=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$0=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$0=7x^3+42x^2$$

$$0=7x^2(x+6)$$

$$7x^2=0$$

$$x=0$$

$$x+6=0$$

$$x=-6$$

את שיעורי ה y נמצא בהצבת שיעורי הx בפונקציה

$$f(0)=0$$

$$(0,0)$$

$$f(-6)=-216$$

$$(-6,-216)$$

כדי לקבוע את סוג הקיצון נשתמש

בטבלה ונציב ערכים לפני ואחרי כל

נקודת קיצון.

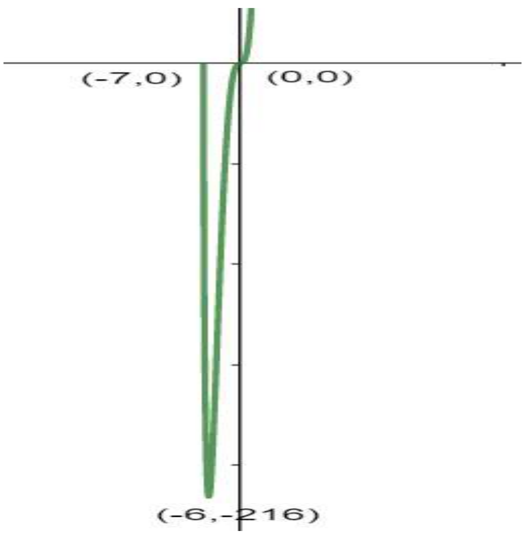
f'(x)			-	0	+	0	+
f(x)		0	↘	-216	↗	0	↗

$$f'(-6.5) = -147.87 < 0$$
$$f'(-1) = 35 > 0$$
$$f'(1) = 49 > 0$$

שימו לב! ב-x=0 הנגזרת מתאפסת אבל היא לא נקודת קיצון כי לפניה ואחריה התקבלו ערכים חיוביים.

לכן נקודות הקיצון הן (-6,-216) מינימום ו(-7,0) מקסימום קצה

(3)עם התשובות והנתונים נוכל לשרטט את הפונקציה.



(4) נסתכל בגרף ונראה שתחום החיוביות הוא x>0. ותחום השליליות -7<x<0.

ד. c יכול להיות חיובי או שלילי. כלומר נזיז את הגרף c יחידות למעלה או למטה. כדי שהגרף ישיק

לציר הx נקודות הקיצון צריכות להיות (0,0) כלומר הנקודות קיצון בהן שיעור הx שווה ל0 צריך

ששיעור הy של אותן נקודות שווה ל0 . נסתכל על שיפוע המשיק שמצאנו בסעיף ג(2) ונראה

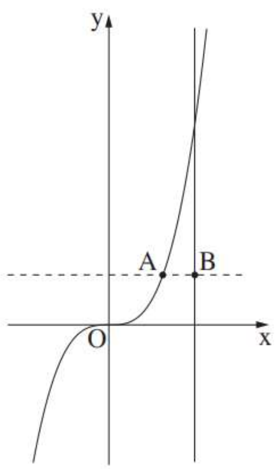
שהשיפוע מתאפס כשx=0, x=-6.

כשx שווה ל0 שיעור הy בלי השינוי של c שווה ל0 אז במקרה הזה c=0.

וכשx שווה ל-6 שיעור הy הוא -216, כדי לאפס ששיעור הy יהיה 0 אז c=216.

www.מטיק.co.il

8)



בציור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x) = x^3$ והישר $x = 2$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $0 < x_A < 2$ (x_A הוא שיעור ה־ x של הנקודה A).

מהנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ x (הישר המקווקו בציור).

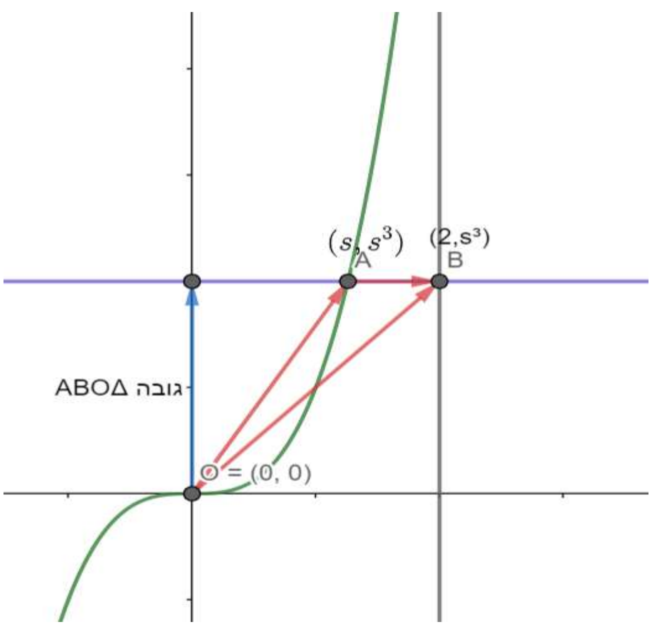
הישר שהעבירו חותך את הישר $x = 2$ בנקודה B (ראה ציור) .

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מה הם שיעורי הנקודה A שבעבורה שטח המשולש ABO הוא מקסימלי? נמק.

ב. חשב את שטח המשולש ABO בעבור הנקודה A שמצאת בסעיף א.

<u>פתרון</u>:



א. בגלל שA נמצא על הפונקציה אפשר לסמן

את A כ (s, s^3)

AB מקביל לציר x כך ששיעור הy של A

ושל B שווים והוא s^3

x של B הוא 2 כי הוא נמצא על הישר x=2.

לכן B הוא $(2, s^3)$

השטח של ABO מורכב מAB- שיעור הx של B פחות זה של A.

ומורכב מהגובה שזה OD- שזה המרחק מציר הx מהישר AB,

$$S_{\Delta ABO} = \frac{AB \cdot OD}{2} = \frac{(2-s)s^3}{2} = \frac{2s^3 - s^4}{2}$$

כדי למצוא מתי השטח מקסימלי נגזור את הפונקציה שקיבלנו ונציב f'(s)=0.

$$f'(s)=\frac{6s^2-4s^3}{2}$$
$$0=6s^2-4s^3$$
$$0=2s^2(3-2s)$$

$$2s^2=0$$
$$s=0$$

$$3-2s=0$$
$$s=1.5$$

נפסול את s=0 לפי הנתון שזה צריך להיות בין 0 ל2

וכדי לקבוע לגבי שתי התוצאות האחרות שקיבלנו נגזור עוד פעם לראות מתי זה עולה ויורד ככה

נדע את סוג הקיצון.

$$f''(s)=\frac{12s-12s^2}{2}$$
$$f''(1.5)=-4.5<0$$

S=1.5 ושיעורי A הם (1.5,3.375)

ב.נציב את שיעורי הנקודה A שמצאנו בסעיף הקודם בחישוב שעשינו לשטח המשולש בסעיף

הקודם.

$$f(1.5)=\frac{2\cdot(1.5)^3-(1.5)^4}{2}=\frac{27}{32}=0.84375$$

השטח שקיבלנו הוא 0.84375 יח"ר